Questão de eletromagnetismo:

O *Large Hadron Collider* (LHC) é o maior acelerador de partículas já construido. Em um túnel circular de 27 km de extensão a aproximadamente 100 metros de profundidade, 2 feixes de protons são acelerados por campos elétricos e confinados em tubos através de potentes campos magnéticos de até 8.3 T gerados por ímãs supercondutores resfriados a temperaturas de 1,9 K. Um desses tubos é esquematizado na figura abaixo.

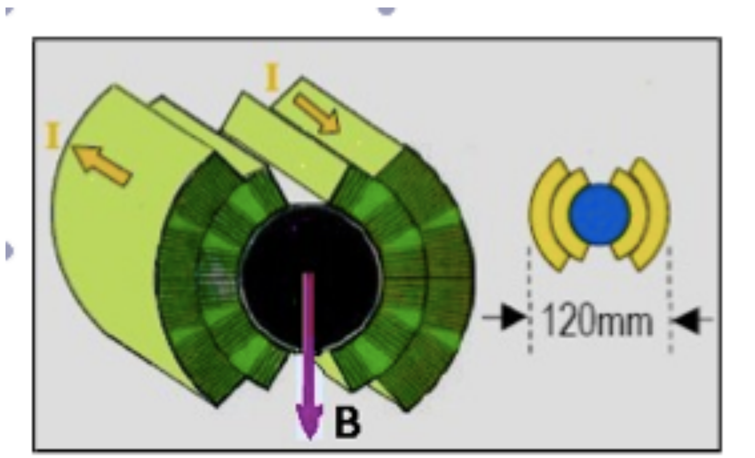


Figure 1: Seção transversal de um tubo

Estime a energia máxima (em GeV) que pode ser obtida pelos protons no LHC e justifica sua estimativa (10 pontos).

Efeitos relativísticos devem ser considerados, pois a energia será muito maior que a massa do proton. Dados que podem ser úteis:
velocidade da luz: c $= 3 \times 10^5$ km/s
carga elétrica do proton: 1.6×10^{-19} C
massa de repouso do proton: 1.8×10^{-27} kg $= 1$ GeV/c^2
1 Tesla $= 1$ kg C$^{-1}s^{-1}$

Questão de Física Matemática

Define P ser o plano complexo incluindo o ponto no infinito. A função

$$z'(z) = \frac{az + b}{cz + d} \tag{1}$$

mapea $P \to P$ onde z e z' são variáveis complexos e (a, b, c, d) são parametros constantes complexos.

1) Qual é a função $z'(z)$ que mapea o semi-plano superior definido por $Re(z) > 0$ para o interior de um círculo com raio 1 definido por $|z'| < 1$? (4 pontos)

2) Qual é o inverso desta função $z(z')$ que mapea o interior de um círculo com raio 1 para o semi-plano superior? (4 pontos)

3) Qual é a condição nos parametros (a, b, c, d) para a função $z'(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ ser invertível? (2 pontos)

Questões de Mecânica Clássica

2012 Prêmio IFT–ICTP para Jovens Físicos

November 20, 2012

Considere o movimento de uma partícula de massa m em um potencial tridimensional com simetria esférica. Para esse sistema, responda as seguintes questões:

a) -02 Pontos- Escreva a Lagrangiana, usando coordenadas esféricas;

b) -02 Pontos- Encontre as equações do movimento;

c) -02 Pontos- Mostre que o movimento da partícula está contido em um plano;

d) -04 Pontos- Escreva **todas** as quantidades conservadas deste movimento, em termos de $r, \vec{r}$ e $\dot{\vec{r}}$, para o caso em que o potencial é dado por $-\kappa/r$, onde κ é uma constante e $\vec{r}$ é o vetor posição da partícula.

Equação de Euler–Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = 0$$

Questão de Mecânica Estatística

Considere um sistema de muitas partículas que se encontra numa mistura estatística de estados $|\psi_n\rangle$, ond n indica os números quânticos necessários para especificar os estados (supostos discretos, por simplicidade), e $|\langle\psi_n|\psi_n\rangle|^2 = 1$. Na descrição de Schrödinger da mecânica quântica, a evolução temporal dos estados é governada pela equação

$$i\hbar\frac{d}{dt}|\psi_n(t)\rangle = \hat{H}(t)|\psi_n(t)\rangle$$

onde $\hat{H}$ é o hamiltoniano do sistema – para um sistema isolado, $\hat{H}$ é independente do tempo, mas se o sistema interage, por exemplo, com um campo externo dependente do tempo, $\hat{H}$ pode depender explicitamente do tempo. O operador densidade do sistema $\hat{\rho}$ é definido como

$$\hat{\rho} = \sum_n p_n\,|\psi_n\rangle\langle\psi_n|$$

onde p_n é a probabilidade de encontrar o sistema no estado $|\psi_n\rangle$, com $p_n \geq 0$ e $\sum_n p_n = 1$. Valores médios $A \equiv \langle\hat{A}\rangle$ de variáveis dinâmicas descritas por operadores $\hat{A}$ são dados por $A = \mathrm{Tr}\,(\hat{A}\,\hat{\rho})$. A entropia estatística $S_{\mathrm{est}}[\rho]$ da mistura estatística de estados é definida como

$$S_{\mathrm{est}}[\rho] = -k\,\mathrm{Tr}(\hat{\rho}\,\ln\hat{\rho})$$

onde k é uma constante positiva. O postulado da entropia estatítica máxima diz que, dentre todos os operadores densidade consistentes com os vínculos macroscópicos impostos ao sistema de muitas partículas, o estado de equilíbrio termodinâmico do sistema é descrito pelo operador densidade $\hat{\rho}_B$ que maximiza a entropia estatítica $S_{\mathrm{est}}[\rho]$, e a entropia termodinâmica é identificada como sendo $S_{\mathrm{est}}[\hat{\rho}_B] \equiv S_B[\rho_B]$.

1) (2,5 pontos) Mostre que a evolução temporal do operador densidade é dada por

$$i\hbar\frac{d}{dt}\hat{\rho}(t) = [\hat{H}(t), \hat{\rho}(t)]$$

2) (2,5 pontos) Mostre que, para uma evolução temporal descrita por um hamiltoniano, a entropia estatística satisfaz

$$\frac{dS_{\mathrm{est}}[\rho]}{dt} = 0$$

3) (2,5 pontos) Mostre que o estado de equilíbrio termodinâmico do sistema, sujeito ao vínculo de que a energia média do sistema é fixada no valor $E = \langle \hat{H} \rangle$, é dado pelo operador densidade

$$\hat{\rho}_B = \frac{1}{Z}\, e^{-\beta \hat{H}}, \qquad Z = \mathrm{Tr}\, e^{-\beta \hat{H}}$$

onde β é uma constante.

4) (2,5 pontos) Suponha que o sistema esteja em equilíbrio e que num dado instante $t = 0$ ele é perturbado fracamente por um campo externo dependente do tempo – suponha que esta perturbação possa ser descrita por um hamiltoniano. Após um tempo suficientemente longo, os efeitos da perturbação externa desaparecem e o sistema alcança um novo estado de equilíbrio. Pelo resultado (2) acima, a entropia estatística permanece constante durante a evolução entre os dois estados de equilíbrio, pois a evolução pode ser descrita por um hamiltoniano. O que você pode dizer sobre a entropia termodinâmica do sistema neste processo – ao alcançar o novo estado de equilíbrio, ela permanece a mesma, aumenta ou diminui em relação à entropia no estado de equilíbrio inicial, em $t = 0$? Elabore sua resposta.

Você pode achar úteis as fórmulas:

$$\mathrm{Tr}\left(\frac{d}{dt} f(\hat{A})\right) = \mathrm{Tr}\left(f'(\hat{A})\frac{d\hat{A}}{dt}\right) \quad \text{ou} \quad d\,\mathrm{Tr} f(\hat{A}) = \mathrm{Tr}\left(f'(\hat{A}) d\hat{A}\right)$$

onde $f'(x) = df(x)/dx$.

$$\mathrm{Tr}\left(\hat{A}\ln\hat{B}\right) - \mathrm{Tr}\left(\hat{A}\ln\hat{A}\right) \leq \mathrm{Tr}\hat{B} - \mathrm{Tr}\hat{A}$$

Questão de Mecânica Quântica

A energia do átomo de hidrogênio no estado quântico $\Psi_{nlm}(\mathbf{r})$ é dada por

$$E_{nlm} = -\frac{\mu e^2}{2n^2\hbar^2} \equiv -\frac{13.6}{n^2} eV, \tag{1}$$

onde μ é a massa reduzida e e a carga do elétron, $\hbar = h/2\pi$ (h = constante de Planck), l é o momento angular e m é a projeção dele ao longo do eixo z. Um elétron no campo Coulombiano do proton se-enconta no estado

$$\Psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{5}[4\Psi_{100}(\mathbf{r}) + 3\Psi_{211}(\mathbf{r})]. \tag{2}$$

(i) Qual é o valor esperado da energia deste elétron? (2 pontos)

(ii) Qual é o valor esperado do l^2? (2 pontos)

(iii) A função de onda da Eq. (**??**) é real? Ou complexa? (1 ponto)

(iv) Qual é a probabilidade de encontrar este elétron no estado fundamental do átomo de hidrogênio? (2 pontos)

(v) Qual é o comprimento de onda da radiação devido a transição de um elétron do estado $n = 3$ para $n = 2$ do átomo de hidrogênio? Esta transição é responsável por a linha vermenha do serie de Balmer. [Dados: $hc = 1.24 \times 10^{-6}$ eV m.] (3 pontos)

QUESTÃO DE RELATIVIDADE RESTRITA:

1. Seja o espaço-tempo de Minkowski (homogêneo, isotrópico e livre de matéria-energia) coberto por um sistema de coordenadas Cartesiano $\{t, x, y, z\}$ com o qual o elemento de linha fica escrito como

$$ds^2 = -c^2dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (c = \text{velocidade da luz}).$$

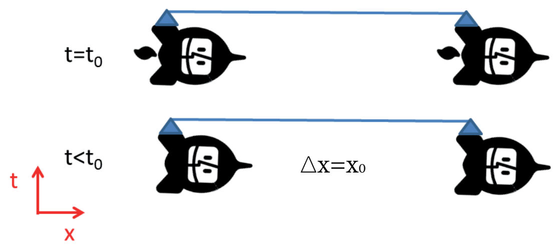
Sejam agora 2 foguetes IDÊNTICOS conectados por um cabo e inicialmente repousando ao longo do eixo x a uma distância $\Delta x = x_0 > 0$ um do outro **(VEJA FIGURA)**.

Em $ct = 0$ os motores de ambos os foguetes são ligados e eles passam a se mover suavemente de acordo com as seguintes equações de movimento (em unidades convenientes):

FOGUETE 1: $x_{(1)}(t) = \sqrt{(ct)^2 + 25}$

FOGUETE 2: $x_{(2)}(t) = \sqrt{(ct)^2 + 25} + 7$

Então, em $ct = 10$ os motores de ambos os foguetes são desligados e eles prosseguem suas jornadas livres de forças.



RESPONDA:

1. Qual é a distância coordenada Δx entre os foguetes no momento em que seus motores são desligados? (1 ponto).

2. Qual é a força por unidade de massa que os motores exercem sobre o foguete (força própria por unidade de massa)? (4 pontos).

3. Assumindo que o cabo que conecta os foguetes se rompe se contraído ou distendido além de 10% do seu tamanho próprio, calcule se o cabo se rompe ou não no processo (5 pontos).