

Questão de eletromagnetismo:

O *Large Hadron Collider* (LHC) é o maior acelerador de partículas já construído. Em um túnel circular de 27 km de extensão a aproximadamente 100 metros de profundidade, 2 feixes de prótons são acelerados por campos elétricos e confinados em tubos através de potentes campos magnéticos de até 8.3 T gerados por ímãs supercondutores resfriados a temperaturas de 1,9 K. Um desses tubos é esquematizado na figura abaixo.

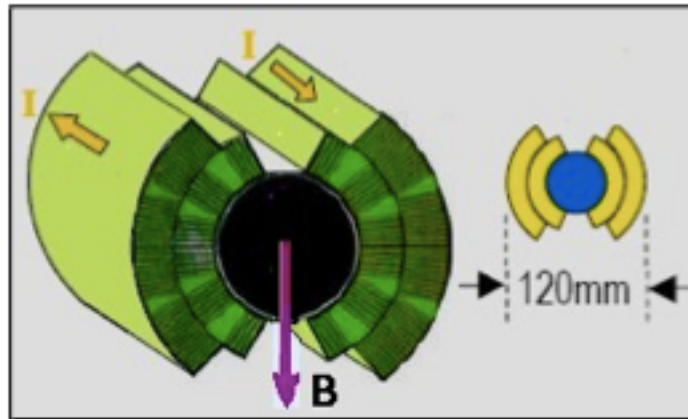


Figure 1: Seção transversal de um tubo

Estime a energia máxima (em GeV) que pode ser obtida pelos prótons no LHC e justifica sua estimativa (10 pontos).

Efeitos relativísticos devem ser considerados, pois a energia será muito maior que a massa do próton. Dados que podem ser úteis:

velocidade da luz:  $c = 3 \times 10^8$  m/s

carga elétrica do próton:  $1.6 \times 10^{-19}$  C

massa de repouso do próton:  $1.67 \times 10^{-27}$  kg = 1 GeV/c<sup>2</sup>

1 Tesla = 1 kg C<sup>-1</sup>s<sup>-1</sup>

## QUESTÃO DE FÍSICA MATEMÁTICA

Define  $P$  ser o plano complexo incluindo o ponto no infinito. A função

$$z'(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad (1)$$

mapeia  $P \rightarrow P$  onde  $z$  e  $z'$  são variáveis complexos e  $(a, b, c, d)$  são parametros constantes complexos.

1) Qual é a função  $z'(z)$  que mapea o semi-plano superior definido por  $Re(z) > 0$  para o interior de um círculo com raio 1 definido por  $|z'| < 1$ ? (4 pontos)

2) Qual é o inverso desta função  $z(z')$  que mapea o interior de um círculo com raio 1 para o semi-plano superior? (4 pontos)

3) Qual é a condição nos parametros  $(a, b, c, d)$  para a função  $z'(z) = \frac{az+b}{cz+d}$  ser invertível? (2 pontos)

# Questões de Mecânica Clássica

2012 Prêmio IFT–ICTP para Jovens Físicos

November 20, 2012

Considere o movimento de uma partícula de massa  $m$  em um potencial tridimensional com simetria esférica. Para esse sistema, responda as seguintes questões:

a) -02 Pontos- Escreva a Lagrangiana, usando coordenadas esféricas;

b) -02 Pontos- Encontre as equações do movimento;

c) -02 Pontos- Mostre que o movimento da partícula está contido em um plano;

d) -04 Pontos- Escreva **todas** as quantidades conservadas deste movimento, em termos de  $r$ ,  $\vec{r}$  e  $\dot{\vec{r}}$ , para o caso em que o potencial é dado por  $-\kappa/r$ , onde  $\kappa$  é uma constante e  $\vec{r}$  é o vetor posição da partícula.

Equação de Euler–Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = 0$$

## QUESTÃO DE MECÂNICA ESTATÍSTICA

Considere um sistema de muitas partículas que se encontra numa mistura estatística de estados  $|\psi_n\rangle$ , onde  $n$  indica os números quânticos necessários para especificar os estados (supostos discretos, por simplicidade), e  $|\langle\psi_n|\psi_n\rangle|^2 = 1$ . Na descrição de Schrödinger da mecânica quântica, a evolução temporal dos estados é governada pela equação

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi_n(t)\rangle = \hat{H}(t) |\psi_n(t)\rangle$$

onde  $\hat{H}$  é o hamiltoniano do sistema – para um sistema isolado,  $\hat{H}$  é independente do tempo, mas se o sistema interage, por exemplo, com um campo externo dependente do tempo,  $\hat{H}$  pode depender explicitamente do tempo. O operador densidade do sistema  $\hat{\rho}$  é definido como

$$\hat{\rho} = \sum_n p_n |\psi_n\rangle \langle\psi_n|$$

onde  $p_n$  é a probabilidade de encontrar o sistema no estado  $|\psi_n\rangle$ , com  $p_n \geq 0$  e  $\sum_n p_n = 1$ . Valores médios  $A \equiv \langle\hat{A}\rangle$  de variáveis dinâmicas descritas por operadores  $\hat{A}$  são dados por  $A = \text{Tr}(\hat{A}\hat{\rho})$ . A entropia estatística  $S_{\text{est}}[\rho]$  da mistura estatística de estados é definida como

$$S_{\text{est}}[\rho] = -k \text{Tr}(\hat{\rho} \ln \hat{\rho})$$

onde  $k$  é uma constante positiva. O postulado da entropia estatística máxima diz que, dentre todos os operadores densidade consistentes com os vínculos macroscópicos impostos ao sistema de muitas partículas, o estado de equilíbrio termodinâmico do sistema é descrito pelo operador densidade  $\hat{\rho}_B$  que maximiza a entropia estatística  $S_{\text{est}}[\rho]$ , e a entropia termodinâmica é identificada como sendo  $S_{\text{est}}[\hat{\rho}_B] \equiv S_B[\rho_B]$ .

1) (2,5 pontos) Mostre que a evolução temporal do operador densidade é dada por

$$i\hbar \frac{d}{dt} \hat{\rho}(t) = [\hat{H}(t), \hat{\rho}(t)]$$

2) (2,5 pontos) Mostre que, para uma evolução temporal descrita por um hamiltoniano, a entropia estatística satisfaz

$$\frac{dS_{\text{est}}[\rho]}{dt} = 0$$

3) (2,5 pontos) Mostre que o estado de equilíbrio termodinâmico do sistema, sujeito ao vínculo de que a energia média do sistema é fixada no valor  $E = \langle \hat{H} \rangle$ , é dado pelo operador densidade

$$\hat{\rho}_B = \frac{1}{Z} e^{-\beta \hat{H}}, \quad Z = \text{Tr} e^{-\beta \hat{H}}$$

onde  $\beta$  é uma constante.

4) (2,5 pontos) Suponha que o sistema esteja em equilíbrio e que num dado instante  $t = 0$  ele é perturbado fracamente por um campo externo dependente do tempo – suponha que esta perturbação possa ser descrita por um hamiltoniano. Após um tempo suficientemente longo, os efeitos da perturbação externa desaparecem e o sistema alcança um novo estado de equilíbrio. Pelo resultado (2) acima, a entropia estatística permanece constante durante a evolução entre os dois estados de equilíbrio, pois a evolução pode ser descrita por um hamiltoniano. O que você pode dizer sobre a entropia termodinâmica do sistema neste processo – ao alcançar o novo estado de equilíbrio, ela permanece a mesma, aumenta ou diminui em relação à entropia no estado de equilíbrio inicial, em  $t = 0$ ? Elabore sua resposta.

Você pode achar úteis as fórmulas:

$$\text{Tr} \left( \frac{d}{dt} f(\hat{A}) \right) = \text{Tr} \left( f'(\hat{A}) \frac{d\hat{A}}{dt} \right) \quad \text{ou} \quad d \text{Tr} f(\hat{A}) = \text{Tr} \left( f'(\hat{A}) d\hat{A} \right)$$

onde  $f'(x) = df(x)/dx$ .

$$\text{Tr} (\hat{A} \ln \hat{B}) - \text{Tr} (\hat{A} \ln \hat{A}) \leq \text{Tr} \hat{B} - \text{Tr} \hat{A}$$

### Questão de Mecânica Quântica

A energia do átomo de hidrogênio no estado quântico  $\Psi_{nlm}(\mathbf{r})$  é dada por

$$E_{nlm} = -\frac{\mu e^2}{2n^2\hbar^2} \equiv -\frac{13.6}{n^2} eV, \quad (1)$$

onde  $\mu$  é a massa reduzida e  $e$  a carga do elétron,  $\hbar = h/2\pi$  ( $h =$  constante de Planck),  $l$  é o momento angular e  $m$  é a projeção dele ao longo do eixo  $z$ . Um elétron no campo Coulombiano do proton se-encontra no estado

$$\Psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{5}[4\Psi_{100}(\mathbf{r}) + 3\Psi_{211}(\mathbf{r})]. \quad (2)$$

- (i) Qual é o valor esperado da energia deste elétron? (2 pontos)
- (ii) Qual é o valor esperado do  $l^2$ ? (2 pontos)
- (iii) A função de onda da Eq. (??) é real? Ou complexa? (1 ponto)
- (iv) Qual é a probabilidade de encontrar este elétron no estado fundamental do átomo de hidrogênio? (2 pontos)
- (v) Qual é o comprimento de onda da radiação devido a transição de um elétron do estado  $n = 3$  para  $n = 2$  do átomo de hidrogênio? Esta transição é responsável por a linha vermelha do serie de Balmer. [Dados:  $hc = 1.24 \times 10^{-6}$  eV m.] (3 pontos)

### QUESTÃO DE RELATIVIDADE RESTRITA:

1. Seja o espaço-tempo de Minkowski (homogêneo, isotrópico e livre de matéria-energia) coberto por um sistema de coordenadas Cartesiano  $\{t, x, y, z\}$  com o qual o elemento de linha fica escrito como

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (c = \text{velocidade da luz}).$$

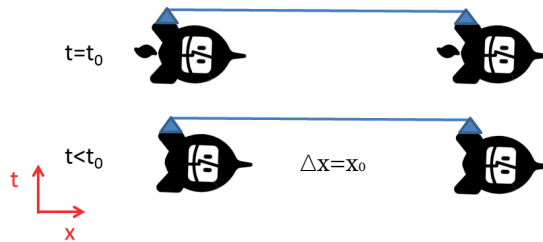
Sejam agora 2 foguetes IDÊNTICOS conectados por um cabo e inicialmente repousando ao longo do eixo  $x$  a uma distância  $\Delta x = x_0 > 0$  um do outro (**VEJA FIGURA**).

Em  $ct = 0$  os motores de ambos os foguetes são ligados e eles passam a se mover suavemente de acordo com as seguintes equações de movimento (em unidades convenientes):

$$\text{FOGUETE 1: } x_{(1)}(t) = \sqrt{(ct)^2 + 25}$$

$$\text{FOGUETE 2: } x_{(2)}(t) = \sqrt{(ct)^2 + 25} + 7$$

Então, em  $ct = 10$  os motores de ambos os foguetes são desligados e eles prosseguem suas jornadas livres de forças.



### RESPONDA:

1. Qual é a distância coordenada  $\Delta x$  entre os foguetes no momento em que seus motores são desligados? (1 ponto).

2. Qual é a força por unidade de massa que os motores exercem sobre o foguete (força própria por unidade de massa)? (4 pontos).

3. Assumindo que o cabo que conecta os foguetes se rompe se contraído ou distendido além de 10% do seu tamanho próprio, calcule se o cabo se rompe ou não no processo (5 pontos).