INSTRUÇÕES de PRÊMIO IFT-ICTP PARA JOVENS FÍSICOS

• **Não escreva seu nome em nenhum lugar da prova. Em cada das seis folhas de questões, escreva o número do seu RG. Verifique que você tem as seis folhas de questões e que seu número RG aparece em cada folha.**

• **Não use a mesma folha de papel para responder questões diferentes. Depois de terminar a prova, grampeia cada folha de questão com as paginas correspondendo a esta questão.**

• **Não é permitido nenhum tipo de consulta!**

• **A prova terá três horas de duração.**

• **Tente responder a um número máximo de perguntas. O valor de cada pergunta aparece ao lado da mesma. Crédito parcial será dado para respostas incompletas. Escreva a devida justificativa nas suas respostas.**

Questão de Eletromagnetismo

Uma esfera dieléctrica, de raio a, com constante de dielétrico κ, é colocada na origem, dentro de um campo elétrico uniforme E_0 ao longo de eixo z.

(a) 5 pontos: Calcule o potencial dentro e fora da esfera em toda região no espaço.

(b) 2 pontos: Calcule o campo elétrico dentro da esfera.

(c) 1 ponto: Mostre que a mudança de campo elétrico fora da esfera é mesmo devido a um dipolo elétrico na origem.

(d) 2 pontos: Ache o momento dipolar deste dipolo elétrico.

Questão de Física Matemática

Um tetrahedron é um objeto com quatro rostos de triángulos equilaterais. O comprimento do lado de cada triángulo é um centimetro.

1) 5 pontos
Calcule o volume do tetrahedron.

2) 5 pontos
O tetrahedron está dentro de uma esfera. Qual é o raio mínimo da esfera?

Questão de Mecânica Clássica

Seja a densidade de lagrangeana dada por

$$\mathcal{L} = \sum_{i,j} g_{ij} \partial \phi_i \bar{\partial} \phi_j ,$$

onde $\partial = \partial_t + \partial_x$, $\bar{\partial} = \partial_t - \partial_x$ e g_{ij} denota uma métrica que não depende dos campos. Determine [1]:

1. Os momentos conjugados Π_{ϕ_i} associados aos campos ϕ_i
2. Construa a densidade de Hamiltoniana deste sistema
3. Mostre que a transformação $\phi_i \to \varphi_i$ tal que

$$\partial_x \varphi_k = \frac{1}{2} \sum_j g^{-1}_{kj} \Pi_{\phi_j} , \qquad \Pi_{\varphi_k} = -2 \sum_j g_{kj} \partial_x \phi_j$$

   preserva os colchetes de Poisson, isto é, corresponde a uma transformação canônica.
4. Mostre que esta transformação preserva a forma do Hamiltoniano.

[1] cada item vale 2,5 pontos.

Questão de Mecânica Estatística

É um fato experimental que muito raramente se tem conhecimento completo do estado quântico de um sistema de muitas partículas. Em geral, somente é possível conhecer a probabilidade p_n que ele se encontre num dado estado $|\psi_n\rangle$ do espaço de Hilbert de estados, com $p_n \geq 0$ e $\sum_n p_n = 1$. Neste caso, diz-se que o sistema não se encontra num estado puro, mas sim numa mistura estatística de estados – por simplicidade, estamos considerando que os estados são caracterizados por números quânticos discretos n. Valores médios de observáveis $\hat{O}$ são então dados por

$$\langle \hat{O} \rangle = \sum_n p_n \, \langle \psi_n | \hat{O} | \psi_n \rangle \tag{1}$$

onde $\langle \psi_n | \hat{O} | \psi_n \rangle$ é o valor médio de $\hat{O}$ no estado $|\psi_n\rangle$ – por simplicidade, tomamos $|\langle \psi_n | \psi_n \rangle|^2 = 1$. O valor médio $\langle \hat{O} \rangle$ também pode ser escrito como

$$\langle \hat{O} \rangle = \mathrm{Tr}\, \hat{O} \hat{\rho} \tag{2}$$

onde $\hat{\rho}$ é o operador densidade $\hat{\rho}$:

$$\hat{\rho} = \sum_n p_n \, |\psi_n\rangle\langle\psi_n| \tag{3}$$

As quantidades $\langle \psi_n | \hat{\rho} | \psi_m \rangle = \rho_{nm}$ definem a matriz densidade do sistema. Uma quantidade útil no estudo desses sistemas é a entropia estatística $S_{\mathrm{est}}[\rho]$ da mistura de estados:

$$S_{\mathrm{est}}[\rho] = -k \, \mathrm{Tr}\, \hat{\rho} \, \ln \hat{\rho} \tag{4}$$

onde k é uma constante positiva.

1) (2 pontos) Prove a Eq. (2) – isto é, mostre que $\mathrm{Tr}\, \hat{O}\hat{\rho} = \sum_n p_n \, \langle \psi_n | \hat{O} | \psi_n \rangle$.

2) (2 pontos) Mostre que se o sistema está num estado puro, sua entropia estatística é igual a zero.

Suponha agora um sistema de muitas partículas constituído de duas partes (a) e (α), descrito por um operador densidade $\hat{\rho}$ que atua no espaço de Hilbert de estados $\mathcal{H}(a) \otimes \mathcal{H}(\alpha)$. Aqui, o símbolo $\otimes$ significa produto tensorial de espaços de estados e $\mathcal{H}(a)$ e $\mathcal{H}(\alpha)$ são os espaços de Hilbert de estados das partes (a) e (α). Define-se os operadores densidades correspondentes às partes (a) e (α) como

$$\hat{\rho}^{(a)} = \mathrm{Tr}_\alpha\, \hat{\rho} \qquad \text{e} \qquad \hat{\rho}^{(\alpha)} = \mathrm{Tr}_a\, \hat{\rho} \tag{5}$$

onde Tr_α significa traço sobre os estados da parte (α) e Tr_a significa traço sobre os estados da parte (a). As entropias estatísticas das partes (a) e (α) são definidas respectivamente como

$$S_{\text{est}}[\rho^{(a)}] = -k\, \mathrm{Tr}_a\, \hat{\rho}^{(a)}\, \ln \hat{\rho}^{(a)} \qquad \text{e} \qquad S_{\text{est}}[\rho^{(\alpha)}] = -k\, \mathrm{Tr}_\alpha\, \hat{\rho}^{(\alpha)}\, \ln \hat{\rho}^{(\alpha)} \tag{6}$$

3) (6 pontos) Mostre que, em geral:

$$S_{\text{est}}[\hat{\rho}] \leq S_{\text{est}}[\hat{\rho}^{(a)}] + S_{\text{est}}[\hat{\rho}^{(\alpha)}] \tag{7}$$

Interprete fisicamente o resultado. Quando vale a igualdade?

Você pode achar útil a fórmula:

$$\mathrm{Tr}\left(\hat{A}\ln\hat{B}\right) - \mathrm{Tr}\left(\hat{A}\ln\hat{A}\right) \leq \mathrm{Tr}\hat{B} - \mathrm{Tr}\hat{A} \tag{8}$$

válida para operadores $\hat{A}$ e $\hat{B}$ hermiteanos positivos.

Questão de Mecânica Quântica

Considere N partículas idênticas sem interação entre si. O sistema é descrito pela hamiltoniana

$$H = \sum_{a=1...N} H_a \tag{1}$$

onde H_a é a hamiltoniana de 1 partícula e por hipótese é independente de spin satisfazendo

$$H_a|i\rangle_a = \varepsilon_i|i\rangle_a \tag{2}$$

onde o índice $i = 1, 2, 3, \cdots$ denota os diferentes estados de 1 partícula.

1a. [2pt] Qual é a energia do estado fundamental se as partículas são bósons?

1b. [2pt] Qual é a energia do estado fundamental se as partículas são férmions (considere N um número par e ímpar separadamente)?

1.c [3pt] Escreva a função de onda de 3 bósons $|1, 2, 3\rangle_b$ em termos dos auto-estados de H_a.

1.d [3pt] Escreva a função de onda de 3 férmions $|1, 2, 3\rangle_f$ em termos dos auto-estados de H_a.

Questões de Relatividade Restrita

2013 Prêmio IFT–ICTP para Jovens Físicos

October 21, 2013

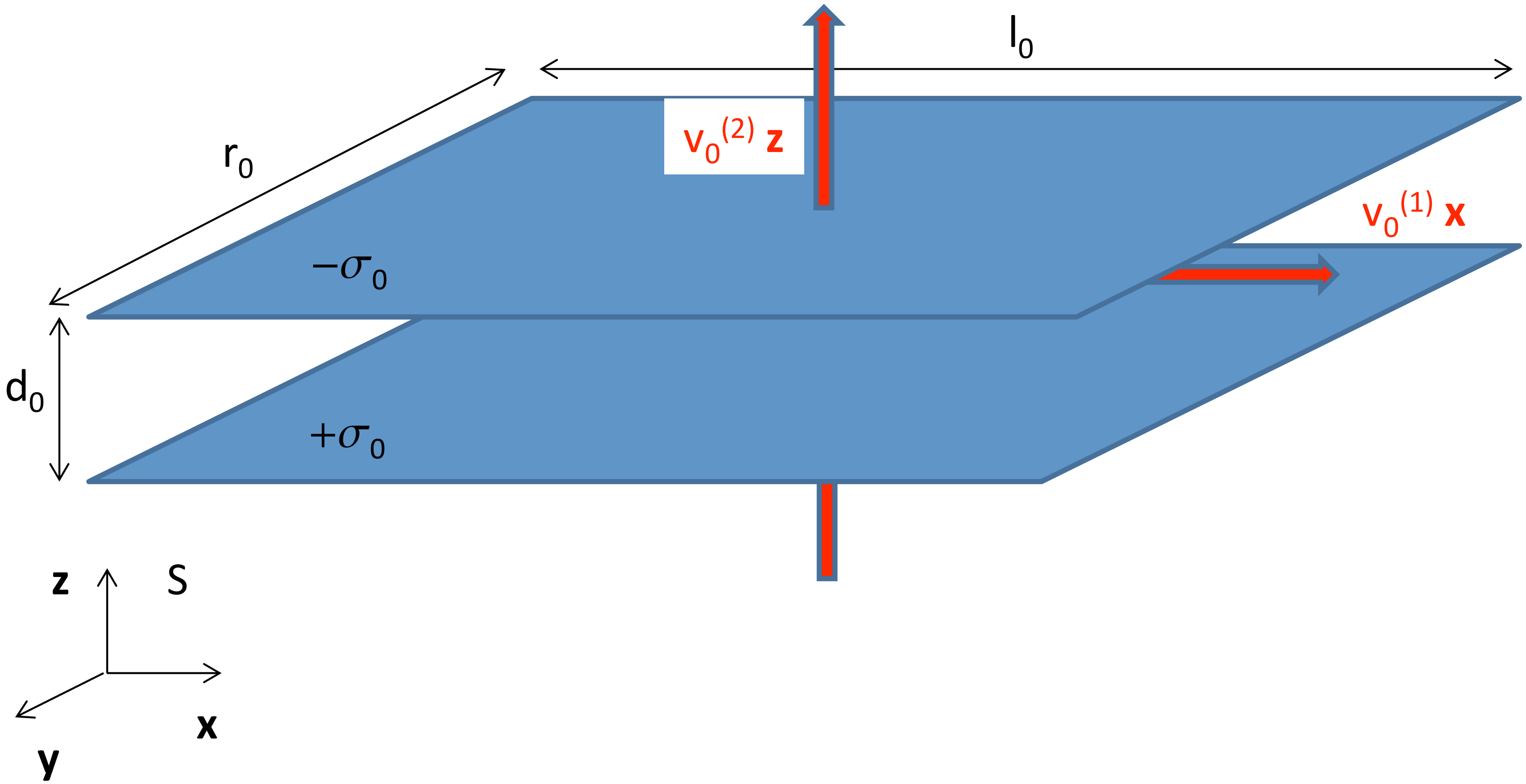
Considere um capacitor de placas paralelas, no vácuo, conforme mostrado na figura (no outro lado desta folha). Nesta, $d_0 \ll l_0, r_0$, são medidas de distância feitas no referencial S_0, onde o capacitor se encontra em repouso. O capacitor foi previamente carregado por uma bateria externa, resultando em uma densidade superficial de carga $-\sigma_0$ para a placa superior e $+\sigma_0$ para a placa inferior. Para esse sistema, sempre desprezando efeitos de bordas, responda as seguintes questões:

a) -02 Pontos- Qual o valor do campo elétrico $\mathbf{E_0}$ e do campo magnético $\mathbf{B_0}$ para as regiões: i) entre as placas e ii) fora delas, quando medidos por um observador em repouso no referencial S_0.

b) -02 Pontos- Considere agora dois observadores, O_1 e O_2, se movendo com velocidades $\vec{v}_1 = v_0\hat{x}$, e $\vec{v}_2 = v_0\hat{z}$, respectivamente, em relação ao referencial S, como indicado na figura. Qual o valor do campo elétrico, $\mathbf{E}$, i) entre as placas e ii) fora delas, quando medido pelos observadores O_1 e O_2, em função de $\mathbf{E_0}$, $\mathbf{B_0}$, σ_0 e das velocidades $\vec{v}_{1,2}$.

c) -02 Pontos- Nas situações descritas em **b)**, os observadores O_1 e O_2 medem campo magnético não nulo?

d) -04 Pontos- Se sim, i) em quais regiões isso ocorre e ii) qual seria o fenômeno físico que originaria esses campos? iii) Qual é o valor desses campos para os observadores O_1 e O_2?



l_0
r_0
$v_0^{(2)}$ z
$v_0^{(1)}$ x
$-\sigma_0$
$+\sigma_0$
d_0
z
S
x
y