

INSTRUÇÕES de PRÊMIO IFT-ICTP PARA JOVENS FÍSICOS

- Não escreva seu nome em nenhum lugar da prova. Em cada das seis folhas de questões, escreva o número do seu RG. Verifique que você tem as seis folhas de questões e que seu número RG aparece em cada folha.
- Não use a mesma folha de papel para responder questões diferentes. Depois de terminar a prova, grampeie cada folha de questão com as paginas correspondendo a esta questão.
- Não é permitido nenhum tipo de consulta!
- A prova terá três horas de duração.
- Tente responder a um número máximo de perguntas. O valor de cada pergunta aparece ao lado da mesma. Crédito parcial será dado para respostas incompletas. Escreva a devida justificativa nas suas respostas.

Questão de Eletromagnetismo

Uma partícula com massa M e carga e está andando num campo magnético constante $B_z = B$ e $B_x = B_y = E_x = E_y = E_z = 0$. A equação de movimento relativística da partícula é

$$\frac{\partial}{\partial t} P_\mu = \frac{e}{c} \frac{\partial X^\nu}{\partial t} F_{\mu\nu}$$

onde $P_\mu = M\gamma \frac{\partial X_\mu}{\partial t}$, $\gamma = (1 - \frac{v^2}{c^2})^{-\frac{1}{2}}$, e $X^\mu(t) = (ct, x(t), y(t), z(t))$ é um 4-vetor. No tempo $t = 0$, a partícula está no ponto $x = y = z = 0$ com velocidade v_x, v_y, v_z .

1) (5 pontos) Calcule a trajetória da partícula $(x(t), y(t), z(t))$.

2) (5 pontos) A partícula agora está andando num campo elétrico e magnético constante $E_x = E$, $B_z = B$ e $E_y = E_z = B_x = B_y = 0$ onde $|E| < |B|$. Calcule a nova trajetória da partícula. (*Dica: Use uma transformação de Lorentz.*)

Questão de Física Matemática

1. A equação de Schroedinger para uma partícula em um potencial é dada por

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi(\vec{r}) + V(\vec{r})\Psi(\vec{r}) = E\Psi(\vec{r}) \quad (1)$$

Uma maneira de resolver esta equação é por meio de uma equação integral

$$\Psi(\vec{r}_1) = \int G(\vec{r}_1, \vec{r}_2) V(\vec{r}_2) \Psi(\vec{r}_2) d\vec{r}_2 \quad (2)$$

onde $G(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$ é a função de Green para o operador de Helmholtz (elétron livre)

$$\mathcal{L}G(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = (\nabla_{\vec{r}_1}^2 + k^2)G(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \quad (3)$$

com

$$E = \frac{\hbar^2}{2m}(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \quad (4)$$

- (a) (3 pt) Demonstre que a função de Green $G(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$, neste caso, depende apenas da diferença entre os vetores \vec{r}_1 e \vec{r}_2 ,

$$G(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = G(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \quad (5)$$

- (b) (7 pt) Calcule a função de Green para o operador de Helmholtz em 3D considerando que o problema é invariante por rotações (esfericamente simétrico)

Dados:

$$\nabla_{\vec{r}}^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \phi} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \sin \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\sin \phi \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \quad (6)$$

$$\delta(\vec{r}) = 4\pi \frac{\delta(r)}{r^2} \quad (7)$$

Mecânica clássica

Considera uma estrela neutrônica densa, porém descrita usando física Galileana e gravitação Newtoniana. Considera que ela é aproximadamente esférica, e de densidade constante, e em rotação com período fixo.

a) (6 pontos) Sabendo a massa M , raio R e período T da estrela, e a constante de Newton G , calcula a (pequena) excentricidade $\epsilon = \frac{R_{\text{Equador}} - R_{\text{Polo}}}{R_{\text{Polo}}}$ da estrela.

b) (2 pontos) Se a estrela passa por uma transição de fase e contrai seu raio pela metade, mantendo sua massa e mantendo uma densidade constante, como muda seu período?

c) (2 pontos) Se em vez disso, 10 por cento da matéria da estrela é expulsa através dos Polos (paralelo com seu eixo), como muda seu período?

Questão de mecânica estatística 2014

Considere um gás ideal monoatômico clássico ocupando um volume V composto por N moléculas de massa m e momentos \vec{p}_i ($i = 1, \dots, N$).

(2,5) 1. Mostre que a função de partição do gás é dada por $Z_N = V^N \left(\frac{2\pi m}{\beta h^2}\right)^{3N/2}$, onde $\beta^{-1} = kT$ (k é a constante de Boltzmann e T a temperatura do gás) e h é a constante de Planck. (Se necessário utilize que $\sum_{\vec{p}} \rightarrow \frac{V}{h^3} \int d^3p$).

(2,5) 2. Sabendo que a razão S/k é dada pela transformada de Legendre de $\ln Z_N$, $\frac{S}{k} = \ln Z_N - \sum_i \lambda_i \frac{\partial \ln Z_N}{\partial \lambda_i}$, onde λ_i são os multiplicadores de Lagrange associados aos vínculos do sistema (no ensemble canônico temos apenas um multiplicador de Lagrange $\lambda_1 = -\beta$ associado ao valor médio de \hat{H}). Mostre que $S = kN \left\{ \ln V + \frac{3}{2} \ln \left(\frac{2\pi m}{\beta h^2}\right) + \frac{3}{2} \right\}$. Você consegue identificar algum problema em relação a este resultado? A entropia é uma grandeza extensiva ou intensiva?

(2,5) 3. Considere ainda a entropia dada pela equação do item 2. Seja um sistema composto por dois gases de massas m_1 e m_2 ocupando o sistema da figura 1. Suponha

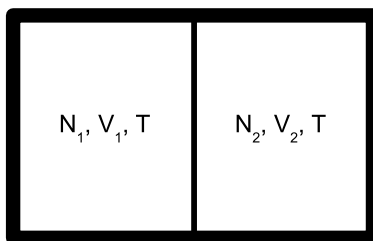


Figura 1: Figura 1 para questão 3.

que a separação que existe entre os dois gases seja removida de maneira que eles comecem a se misturar. Escreva a equação para a variação total da entropia do sistema. Com base no resultado encontrado, o processo é reversível?

(2,5) 4. Paradoxo de Gibbs. Suponha, agora, que as partículas são idênticas e que a densidade é uniforme, ou seja, $\frac{N_1}{V_1} = \frac{N_2}{V_2} = \frac{N_1+N_2}{V_1+V_2}$. Escreva a equação para a variação da entropia em termos de N_1 e N_2 . Como fica a reversibilidade neste caso. Este resultado é razoável fisicamente? Caso identificado algum problema, você teria alguma sugestão para resolvê-lo? (Dica: a inclusão de $N!$ em algum lugar pode ser útil)

Questão de Mecânica Quântica

Considere o oscilador harmônico unidimensional, com hamiltoniano:

$$H = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 X^2 = \frac{\hbar\omega}{2} (\hat{X}^2 + \hat{P}^2)$$

onde:

$$\hat{X} = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} X; \quad \hat{P} = \sqrt{\frac{1}{m\hbar\omega}} P; \quad [\hat{X}, \hat{P}] = i$$

1. (3pts.) Usando:

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{X} + i\hat{P}); \quad a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{X} - i\hat{P}); \quad [a, a^\dagger] = 1,$$

mostre que:

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega, \quad n \geq 0, \quad n \in \mathbb{Z},$$

onde E_n é o autovalor de H : $H|n\rangle = E_n|n\rangle$.

2. (2pts.) Considere agora uma partícula se movendo em três dimensões, sujeita ao potencial:

$$H = \frac{|\vec{P}|^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 |\vec{r}|^2$$

com $\vec{P} = (P_X, P_Y, P_Z)$ e $\vec{r} = (X, Y, Z)$. Quais são os possíveis níveis de energia para esta partícula?

3. (2 pts.) Monte uma tabela com os três níveis menos energéticos para o sistema do exercício (2). Em cada linha desta tabela liste a energia do sistema, sua degenerescência e os auto-estados correspondentes (representados em função dos números quânticos apropriados).

4. (3 pts.) Considere que submetemos a partícula do exercício (2) a uma pequena perturbação externa na direção X, de forma que o hamiltoniano fique:

$$H = \frac{|\vec{P}|^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 |\vec{r}|^2 + \lambda\hbar\omega\hat{X},$$

onde $\lambda \ll 1$. Como muda a tabela do exercício (3), levando em conta a primeira correção não nula desta perturbação?

Formulário

$$a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle; \quad a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$$

$$E_n = E_n^0 + \langle\phi_n|W|\phi_n\rangle + \sum_{n'(n'\neq n)} \frac{|\langle\phi_{n'}|W|\phi_n\rangle|^2}{E_n^0 - E_{n'}^0} + \dots$$

Questão de Relatividade Restrita

O antipróton, uma partícula com a mesma massa ($M = 1 \text{ GeV}/c^2$) mas carga elétrica oposta ao do próton, foi descoberta em colisões próton-próton em um acelerador de partículas chamado Bevatron em Berkeley em 1955 e deu o prêmio Nobel de 1959 a Owen Chamberlain e Emilio Segré.

(a) Escreva a reação que resulta na produção de 1 antipróton. [2pt]

(b) Escreva os quadri-momentos dos prótons iniciais no referencial do laboratório, onde um próton tem energia E e move-se na direção z e o outro próton está em repouso. [2pt]

(c) Escreva os quadri-momentos das partículas finais na reação (a) no chamado referencial do centro-de-massa (onde o tri-momento total é nulo), na situação onde elas tem a menor energia possível. [2pt]

(d) Usando a invariância de Lorentz e a conservação de energia e momento, calcule a menor energia (em GeV) do próton inicial para que seja possível produzir um antipróton. [4pt]