INSTRUÇÕES de PRÊMIO IFT-ICTP PARA JOVENS FÍSICOS

• Não escreva seu nome em nenhum lugar da prova. Em cada das seis folhas de questões, escreva o número do seu RG. Verifique que você tem as seis folhas de questões e que seu número RG aparece em cada folha.

• Não use a mesma folha de papel para responder questões diferentes. Depois de terminar a prova, grampeia cada folha de questão com as paginas correspondendo a esta questão.

• Não é permitido nenhum tipo de consulta!

• A prova terá três horas de duração.

• Tente responder a um número máximo de perguntas. O valor de cada pergunta aparece ao lado da mesma. Crédito parcial será dado para respostas incompletas. Escreva a devida justificativa nas suas respostas.

Questão de Eletromagnetismo

Uma partícula com massa M e carga e está andando num campo magnético constante $B_z = B$ e $B_x = B_y = E_x = E_y = E_z = 0$. A equação de movimento relativística da partícula é

$$\frac{\partial}{\partial t} P_\mu = \frac{e}{c} \frac{\partial X^\nu}{\partial t} F_{\mu\nu}$$

onde $P_\mu = M\gamma \frac{\partial X_\mu}{\partial t}$, $\gamma = (1 - \frac{v^2}{c^2})^{-\frac{1}{2}}$, e $X^\mu(t) = (ct, x(t), y(t), z(t))$ é um 4-vetor. No tempo $t = 0$, a partícula está no ponto $x = y = z = 0$ com velocidade v_x, v_y, v_z.

1) (5 pontos) Calcule a trajetória da partícula $(x(t), y(t), z(t))$.

2) (5 pontos) A partícula agora está andando num campo elétrico e magnético constante $E_x = E$, $B_z = B$ e $E_y = E_z = B_x = B_y = 0$ onde $|E| < |B|$. Calcule a nova trajetória da partícula. (*Dica: Use uma transformação de Lorentz.)*

Questão de Física Matemática

1. A equação de Schroedinger para uma particula em um potencial é dada por
$$-\frac{h^2}{2m}\nabla^2\Psi\left(\vec{r}\right)+V\left(\vec{r}\right)\Psi\left(\vec{r}\right)=E\Psi\left(\vec{r}\right) \tag{1}$$
Uma maneira de resolver esta equação é por meio de uma equação integral
$$\Psi\left(\vec{r}_1\right)=\int G\left(\vec{r}_1,\vec{r}_2\right)V\left(\vec{r}_2\right)\Psi\left(\vec{r}_2\right)d\vec{r}_2 \tag{2}$$
onde $G\left(\vec{r}_1,\vec{r}_2\right)$ é a função de Green para o operador de Helmholtz (elétron livre)
$$\mathcal{L}G\left(\vec{r}_1,\vec{r}_2\right)=\left(\nabla^2_{\vec{r}_1}+k^2\right)G\left(\vec{r}_1,\vec{r}_2\right)=\delta\left(\vec{r}_1-\vec{r}_2\right) \tag{3}$$
com
$$E=\frac{h^2}{2m}\left(k_x^2+k_y^2+k_z^2\right)=\frac{h^2k^2}{2m} \tag{4}$$
   (a) (3 pt) Demonstre que a função de Green $G\left(\vec{r}_1,\vec{r}_2\right)$, neste caso, depende apenas da diferena entre os vetores $\vec{r}_1$ e $\vec{r}_2$,
$$G\left(\vec{r}_1,\vec{r}_2\right)=G\left(\vec{r}_1-\vec{r}_2\right) \tag{5}$$
   (b) (7 pt) Calcule a função de Green para o operador de Helmholtz em 3D considerando que o problema é invariante por rotações (esfericamente simétrico)

Dados:
$$\nabla^2_{\vec{r}} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\phi}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\frac{1}{r^2\sin\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}\left(sin\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\right) \tag{6}$$
$$\delta\left(\vec{r}\right) = 4\pi\frac{\delta\left(r\right)}{r^2} \tag{7}$$

Mecânica clásica

Considera uma estrela neutrônica densa, porém descrita usando física Galileana e gravitação Newtoniana. Considera que ela é aproximadamente esferica, e de densidade constante, e em rotação com período fixo.

a) (6 pontos) Sabendo a massa M, raio R e período T da estrela, e a constante de Newton G, calcula a (pequena) excentricidade $\epsilon = \frac{R_{\mathrm{Equador}} - R_{Polo}}{R_{Polo}}$ da estrela.

b) (2 pontos) Se a estrela passa por uma transição de fase e contrai seu raio pela metade, mantendo sua massa e mantendo uma densidade constante, como muda seu período?

c) (2 pontos) Se em vez disso, 10 porcento da matéria da estrela é expulsa atraves dos Polos (paralelo com seu eixo), como muda seu período?

Questão de mecânica estatística 2014

Considere um gás ideal monoatômico clássico ocupando um volume V composto por N moléculas de massa m e momentos $\vec{p}_i$ $(i = 1, ..., N)$.

(2,5) 1. Mostre que a função de partição do gás é dada por $Z_N = V^N \left(\frac{2\pi m}{\beta h^2}\right)^{3N/2}$, onde $\beta^{-1} = kT$ (k é a constante de Boltzmann e T a temperatura do gás) e h é a constante de Planck. (Se necessário utilize que $\sum_{\vec{p}} \to \frac{V}{h^3} \int d^3p$).

(2,5) 2. Sabendo que a razão S/k é dada pela transformada de Legendre de $\ln Z_N$, $\frac{S}{k} = \ln Z_N - \sum_i \lambda_i \frac{\partial \ln Z_N}{\partial \lambda_i}$, onde λ_i são os multiplicadores de Lagrange associados aos vínculos do sistema (no ensemble canônico temos apenas um multiplicador de Lagrange $\lambda_1 = -\beta$ associado ao valor médio de $\hat{H}$). Mostre que $S = kN\{\ln V + \frac{3}{2} \ln\left(\frac{2\pi m}{\beta h^2}\right) + \frac{3}{2}\}$. Você consegue identificar algum problema em relação a este resultado? A entropia é uma grandeza extensiva ou intensiva?

(2,5) 3. Considere ainda a entropia dada pela equação do item 2. Seja um sistema composto por dois gases de massas m_1 e m_2 ocupando o sistema da figura 1. Suponha

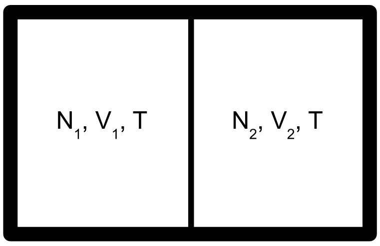

Figura 1: Figura 1 para questão 3.

que a separação que existe entre os dois gases seja removida de maneira que eles comecem a se misturar. Escreva a equação para a variação total da entropia do sistema. Com base no resultado encontrado, o processo é reversível?

(2,5) 4. Paradoxo de Gibbs. Suponha, agora, que as partículas são idênticas e que a densidade é uniforme, ou seja, $\frac{N_1}{V_1} = \frac{N_2}{V_2} = \frac{N_1+N_2}{V_1+V2}$. Escreva a equação para a variação da entropia em termos de N_1 e N_2. Como fica a reversibilidade neste caso. Este resultado é razoável fisicamente? Caso identificado algum problema, você teria alguma sugestão para resolvê-lo? (Dica: a inclusão de $N!$ em algum lugar pode ser útil)

Questão de Mecânica Quântica

Considere o oscilador harmônico unidimensional, com hamiltoniano:

$$H = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 X^2 = \frac{\hbar\omega}{2}\left(\hat{X}^2 + \hat{P}^2\right)$$

onde:

$$\hat{X} = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}X; \quad \hat{P} = \sqrt{\frac{1}{m\hbar\omega}}P; \quad \left[\hat{X}, \hat{P}\right] = i$$

1. (3pts.) Usando:

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{X} + i\hat{P}\right); \quad a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{X} - i\hat{P}\right); \quad \left[a, a^\dagger\right] = 1,$$

mostre que:

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega, \;\; n \geq 0, \; n \in \mathbb{Z},$$

onde E_n é o autovalor de H: $H|n\rangle = E_n|n\rangle$.

2. (2pts.) Considere agora uma partícula se movendo em três dimensões, sujeita ao potencial:

$$H = \frac{|\vec{P}|^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2|\vec{r}|^2$$

com $\vec{P} = (P_X, P_Y, P_Z)$ e $\vec{r} = (X, Y, Z)$. Quais são os possíveis níveis de energia para esta partícula?

3. (2 pts.) Monte uma tabela com os três níveis menos energéticos para o sistema do exercício (2). Em cada linha desta tabela liste a energia do sistema, sua degenerescência e os auto-estados correspondentes (representados em função dos números quânticos apropriados).

4. (3 pts.) Considere que submetemos a partícula do exercício (2) a uma pequena perturbação externa na direção X, de forma que o hamiltoniano fique:

$$H = \frac{|\vec{P}|^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2|\vec{r}|^2 + \lambda\hbar\omega\hat{X},$$

onde $\lambda \ll 1$. Como muda a tabela do exercício (3), levando em conta a primeira correção não nula desta perturbação?

Formulário

$$a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle; \quad a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$$

$$E_n = E_n^0 + \langle\phi_n|W|\phi_n\rangle + \sum_{n'(n'\neq n)} \frac{|\langle\phi_{n'}|W|\phi_n\rangle|^2}{E_n^0 - E_{n'}^0} + \ldots$$

Questão de Relatividade Restrita

O antipróton, uma partícula com a mesma massa ($M = 1$ GeV/c^2) mas carga elétrica oposta ao do próton, foi descoberta em colisões próton-próton em um acelerador de partículas chamado Bevatron em Berkeley em 1955 e deu o prêmio Nobel de 1959 a Owen Chamberlain e Emilio Segré.

(a) Escreva a reação que resulta na produção de 1 antipróton. [2pt]

(b) Escreva os quadri-momentos dos prótons iniciais no referencial do laboratório, onde um próton tem energia E e move-se na direção z e o outro próton está em repouso. [2pt]

(c) Escreva os quadri-momentos das partículas finais na reação (a) no chamado referencial do centro-de-massa (onde o tri-momento total é nulo), na situação onde elas tem a menor energia possível. [2pt]

(d) Usando a invariância de Lorentz e a conservação de energia e momento, calcule a menor energia (em GeV) do próton inicial para que seja possível produzir um antipróton. [4pt]