Mecânica Clássica

1) Considere uma Lagrangiana $L(x^j, \frac{d}{dt}x^j)$ onde $j = 1$ a 3 que seja invariante sobre a transformação

$$\delta x^j = f^j(x).$$

Esta simetria implica a existência de uma carga conservada.

a) (1 pt) Calcule a equação de movimento para x^j.

b) (2 pt) Escreva a carga conservada em termos da Lagrangiana e a função $f^j(x)$.

2) Agora considere outra Lagrangiana $L(x^j, \frac{d}{dt}x^j.\frac{d^2}{dt^2}x^j)$ que seja invariante sobre a mesma transformação $\delta x^j = f^j(x)$.

a) (3 pt) Calcule a equação de movimento para x^j.

b) (4 pt) Escreva a carga conservada em termos da Lagrangiana e a função $f^j(x)$.

Questão de Mecânica Quântica

O prêmio Nobel de 2015 foi dado para experimentos que comprovaram um fenômeno denominado "oscilação de neutrinos", que vamos analisar nessa questão. Neutrinos são partículas elementares sem carga elétrica e antes desses experimentos acreditava-se que tinham massa nula.

Vamos considerar 2 neutrinos distintos, que denotamos por ν_e e ν_μ, representando o neutrino associado ao elétron e o neutrino associado ao múon, respectivamente. Trataremos esses neutrinos como estados em Mecânica Quântica. Vamos assumir que esses neutrinos não são auto-estados de massa - os auto-estados de massa serão denotados por ν_1 e ν_2. Como o espaço de Hilbert consiste de apenas 2 estados, podemos escrever os estados ν_e e ν_μ como uma combinação linear ortogonal dos auto-estados de massa (ortonormais):

$$\begin{aligned} |\nu_e\rangle &= \cos\theta\, |\nu_1\rangle + \sin\theta\, |\nu_2\rangle \\ |\nu_\mu\rangle &= -\sin\theta\, |\nu_1\rangle + \cos\theta\, |\nu_2\rangle, \end{aligned} \tag{1}$$

onde θ é conhecido como ângulo de mistura.

Os auto-estado de massa tem massa e energia bem definidos e sua propagação é descrita por uma equação de Schrödinger dependente do tempo ($i = 1, 2$):

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\nu_i(t)\rangle = \hat{H} |\nu_i(t)\rangle \tag{2}$$

com

$$\hat{H} |\nu_i(t)\rangle = E_i |\nu_i(t)\rangle. \tag{3}$$

(a) Assumindo que as massas dos neutrinos são muito menores que sua energia e momento típicos produzidos em experimentos, mostre que podemos escrever [1pt]:

$$E_i = \sqrt{p^2 + m_i^2} \approx p + \frac{m_i^2}{2p} \tag{4}$$

(b) Mostre que em um instante t um neutrino que inicialmente estava no estado $|\nu_e\rangle$ está no estado (use $\hbar = 1$) [2pt]:

$$|\nu_e(t)\rangle = e^{-ipt} \left[e^{-i\frac{m_1^2 t}{2p}} \cos\theta |\nu_1(0)\rangle + e^{-i\frac{m_2^2 t}{2p}} \sin\theta |\nu_2(0)\rangle \right] \tag{5}$$

(c) Calcule a amplitude the transição de um ν_μ no estado inicial para um ν_e no instante t, $\langle \nu_e(t) | \nu_\mu(0) \rangle$ [3pt]

(d) Mostre que a probabilidade de transição de um ν_μ no estado inicial para um ν_e no instante t pode ser escrita como [4pt]:

$$P(\nu_\mu(0) \to \nu_e(t)) = \sin^2 2\theta \sin^2 \left[\frac{\Delta m^2 L}{4E} \right] \tag{6}$$

onde $\Delta m^2 = m_1^2 - m_2^2$, L é a distância de propagação ($t = L$ usando $c = 1$) e $p \approx E$.

Note que se a **diferença** de massa fosse nula, $\Delta m^2 = 0$, não haveria o efeito de oscilação de neutrinos.

Mecânica Estatistica

Considere um sistema formado por N particulas de spin $S = 1/2$. As partículas estão fixas em seus respectivos sítios e não interagem entre si. Ligamos então um campo magnético $\vec{B}$ de modo que o Hamiltoniano total para o problema é

$$\mathcal{H} = -\sum_i \mu_B \ \vec{\sigma}_i \cdot \vec{B} \tag{1}$$

onde,

$$\mu_B = \frac{q\hbar}{2m} \ , \tag{2}$$

é o magnetom de Bohr, e $\hat{\vec{\sigma}}_i = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$,

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \ , \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \ , \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \ , \tag{3}$$

sãp as matrizes de Pauli.

Sem perda de generalidade vamos considerar que o campo magnético está aplicado na direção z.

1. Calcule a função de partição para uma partícula e para N partículas nas condições acima para uma dada temperatura T e valor de campo magnético.

2. Escreva a matriz densidade do problema e calcule a energia média do sistema em função da temperatura e do campo magnético.

3. Considerando que a magnetização total M é a média dos momentos magnéticos, obtenha M função da temperatura e do campo magnético.

4. Para o limite de temperaturas altas e campos baixos, calcule a susecptibilidade magnética

   $$\chi = \mu_0 \frac{dM}{dB} \tag{4}$$

   e obtenha a Lei de Curie.

Electromagnetismo

Considera uma esfera condutora, conectada na terra, de raio R, concentrica com uma esfera condutora de raio $2R$ e carga elétrica Q situada na distância igual entre dois planos paralelos condutores infinitos, a uma distância de $4R$ do centro comum das esferas até cada um dos planos. Q, R e ϵ_0 são dados.

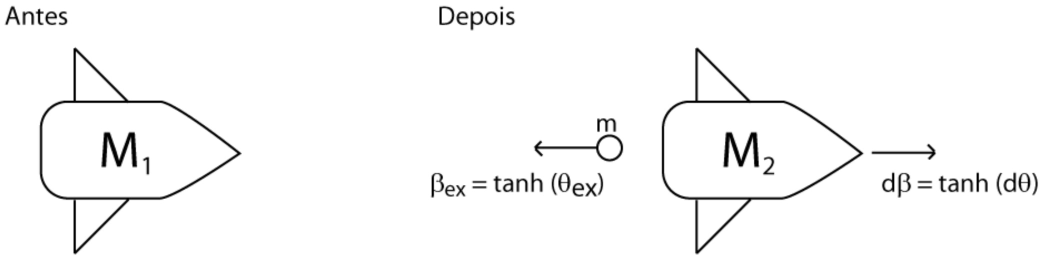
1) (2 pontos) Calcule a magnitude e a direção do campo elétrico na superficie da esfera interior.

2) (3 pontos) Calcule a magnitude e a direção do campo elétrico na superficie de cada plano. Não precisa calcular nenhuma possível formula puramente num érica.

3) (5 pontos) Se uma onda eletromagnética aproximadamente planar (oscilação em uma dimensão espacial) com vetor de onda $k = 2\pi/\lambda$, com $\lambda \ll R$, excita o movimento dos elétrons da esfera exterior, e depois desaparece, qual é a frequencia ω de oscilação para o relaxamento até o estado não perturbado da esfera exterior? Além do R, Q e ϵ_0, também a massa m do elétron, e o comprimento de onda λ são conhecidos. Precisa calcular só a dependencia paramétrica, e não fatores numéricos como 2, π, etc.

Relatividade Restrita

O foguete relativístico: idealizemos o funcionamento de um foguete como a ejeção de uma série de pacotes idênticos de matéria, conforme o diagrama:



onde $\beta = \frac{v}{c}$ para a velocidade v do objeto em questão. Assuma que o foguete é bem regular e que todos os pacotes expelidos tem a mesma velocidade (quando vistos do referencial em que o foguete está em repouso, antes da ejeção de cada pacote), esta é a *velocidade de exaustão* β_{ex}.

1. (3pts.) Usando as notações definidas na figura, escreva as equações para conservação de momento e energia. Elimine a massa do pacote ejetado m e mostre que:
$$d\theta = \beta_{ex}\left(\frac{M_1 - M_2}{M_2}\right)$$

2. (2pts.) Agora, considerando que M_1 e M_2 são muito próximos e que os *parâmetros de velocidade* $d\theta$ são aditivos, mostre que o parâmetro de velocidade θ do foguete (no referencial original) depois de um número grande de pacotes ejetados é dado por:
$$\theta = \beta_{ex}\, ln\frac{M_1}{M},$$
onde M é a massa do foguete após as ejeções.

3. (1pts.) Volte nas equações de conservação e mostre que a massa de repouso não é conservada. Aonde ela vai?

4. (1pts.) Mostre que no limite em que os pacotes expelidos são ultra-relativísticos (velocidade muito próxima da luz) a massa m necessária para obter uma certa velocidade $d\beta$ para o foguete é próxima de zero. Considere então um foguete que "ejeta" apenas radiação, e infira que neste caso:
$$\theta = ln\frac{M_1}{M},$$
Vire para o outro lado da folha

5. (3pts.) Mostre que a vida dos engenheiros de espaçonaves não é fácil. Considere um foguete perfeito, que converte em radiação toda a matéria (e talvez antimatéria) que usa como combustível, e ejeta toda essa radiação sem qualquer perda. Suponha que nosso projeto de colonização espacial precisa que viajemos com um fator de dilatação temporal 10, para que nossos colonos cheguem em seu destino antes da aposentadoria.

   (i) Qual é a menor *razão de massa* (definida como a massa inicial dividida pela massa que resta quando desligamos o foguete), para que consigamos este feito?

   (ii) Suponha que a viagem seja só de ida, então precisamos acelerar na partida e desacelerar perto do destino. Qual é a massa mínima ao lançamento de um foguete que leva uma carga (tudo que não for combustível) de 100 toneladas? (Assumindo que o alvo está praticamente parado em relação à Terra, e que podemos desprezar qualquer efeito gravitacional).

   (iii) Quão longe é possível chegar no tempo de vida útil de um astronauta do futuro (digamos que eles vivam 50 anos)? Quanto tempo passou na Terra? (Despreze as fases de aceleração inicial e final, muito curtas comparado com tempo de viagem em velocidade constante).

Formulário

Para $d\theta$ pequeno: $senh(d\theta) \approx d\theta$; $cosh(d\theta) \approx 1$

Para $\theta > 1$: $cosh(\theta) \approx senh(\theta) \approx \frac{e^\theta}{2}$

$$\frac{1}{\sqrt{1 - tanh^2(\theta)}} = cosh(\theta) \qquad \frac{tanh(\theta)}{\sqrt{1 - tanh^2(\theta)}} = senh(\theta)$$

Questão de física matemática 2015

Considere que $J = \int_{x_1}^{x_2} f(y, y_x, x)dx$ ($y_x \equiv \frac{dy}{dx}$) é uma quantidade que possui um valor extremo.

(2,5) 1. Mostre que uma condição para que J possua um valor extremo é dada por (equação de Euler):

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y_x} = 0. \tag{1}$$

Dica: considere que se queira encontrar um caminho de integração entre os pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) de maneira que a integral seja um extremo. Então, podemos, a princípio, introduzir um certo parâmetro α e modificar o caminho $y(x, \alpha) = y(x, 0) + \alpha\eta(x)$, sendo que a função arbitrária $\eta(x)$ deve satisfazer apenas às restrições $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$. Agora, portanto, temos apenas que calcular um extremo para $J = J(\alpha)$.

(2,5) 2. Mostre que a equação (1) pode também ser escrita como

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dx}\left(f - y_x\frac{\partial f}{\partial y_x}\right) = 0. \tag{2}$$

Note que esta segunda forma é conveniente quando f não depende explicitamente de x.

(5,0) 3. Prove que, para uma dada área superficial constante, a esfera é o sólido de revolução que possui o máximo volume (para este exercício é suficiente apenas mostrar que a esfera representa uma situação de extremo).