Intro AdS|CFT Lima 2020

Clase III : AdS & CFT

Recapitulemos:

$$\boxed{\begin{array}{l} AdS_{d+1} = \text{Maximally symmetric curved space} \\ CFT_d = QFT \text{ sin running couplings} \end{array}} \Bigg\} \text{ Tienen el mismo grupo de simetrías}$$

$$\boxed{SO(d,2)}$$

En el contexto cuántico, el grupo de simetría sirve para clasificar los estados.

$L_z = M_{xy} = i(x\partial_y - y\partial_x)$, $\vec{r}\times\vec{p}$, $\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$

Recordemos que en Poincaré $\{M_{\mu\nu}, P_\rho\}$

boost $M_{tx} = K_x = x\partial_t + t\partial_x$

tenemos 2 Casimires $\to P^2 = -m^2$

$W^2 = m^2 S(S+1)$

Pauli-Lubanski $W_\mu = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} M^{\nu\rho} P^\sigma$

Las irreps se clasifican con (m^2, S)

masa espín

Wigner $\rightsquigarrow$ $\boxed{\Phi(x) \text{ Campos Cuánticos Mink} \leftrightarrow \text{Poincaré irreps}}$

Campo escalar $\phi \to \underbrace{(\Box - m^2)\phi = 0}_{(m^2, S=0) \text{ irrep}}$ $\phi = \sum_p a_p e^{ipx} + a_p^\dagger e^{-ipx}$

Campo de Dirac $\Psi \sim (\not{\partial} - m)\Psi = 0$

$(m^2, S = \frac{1}{2})$ irrep

Campo de gauge $A_\mu \sim \partial_\mu F^{\mu\nu} = 0$

$(m^2 = 0, h = 1)$

helicidad

$W_\mu = h P_\mu$ cuando $m^2 = 0$

Weinberg QFT Vol I

Cap 2 & 3

En el contexto AdS|CFT el grupo de simetrías es $SO(d,2) \to \{S_{ab}\}$. Hagamos algo de Group theory

$$SO(d,2) \supset \underbrace{SO(d) \times SO(2)}_{\text{Maximal compact subgroup}}$$

esquemáticamente, los Casimires van a estar relacionados con el MCS

$SO(2) \leftrightarrow \Delta$

$M_{-0} = \partial_t$

$SO(d) \leftrightarrow (J_1, J_2, \ldots)$ dependiendo de la dimensión "d"

$-y_-^2 - y_0^2 + \vec{y}^{\,2} = -L^2$

$y^\mu = \begin{pmatrix} y_- \\ y_0 \\ \vec{y} \end{pmatrix}$

$SO(2,3)$ AdS$_4$ $\Rightarrow$ $SO(2,3) \leftrightarrow (\Delta, J)$

$y_- = \cosh\rho \cos t$, $y_0 = \cosh\rho \sin t$, $\vec{y} = \sinh\rho\, \vec{n}$, $\rightsquigarrow ds^2 = -\cosh^2\rho\, dt^2 + d\rho^2 + \sinh^2\rho\, d\Omega$

Volvamos a nuestro toy model AdS$_2$ $\sim$ solo 1 Casimir

AdS$_2 \leftrightarrow SO(2,1)$, $\{S_{ab}\}_{a,b=-,0,1} \rightsquigarrow J^2 =$ Casimir

$-y_-^2 - y_0^2 + y_1^2 = -L^2$

$S_{0-} = H$

$S_{01} = P_1$

$S_{-1} = P_2$

$[P_2, H] = iP_1$

$[H, P_1] = iP_2$

$[P_1, P_2] = -iH$ $\to$ crucial

$SO(3) \to SO(2,1)$

Nota: A nivel de álgebras $M_1^\dagger \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0\end{pmatrix} M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0\end{pmatrix}$

$SO(2,1) = SL(2,\mathbb{R}) = Sp(2,\mathbb{R}) = SU(1,1)$ $\to U^\dagger \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1\end{pmatrix} U = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1\end{pmatrix}$

$R^t \begin{pmatrix} + & \\ & + \\ & & - \end{pmatrix} R = \begin{pmatrix} + & & \\ & + & \\ & & - \end{pmatrix}$

todos son grupos no compactos

Math $\rightsquigarrow$ Killing metric tiene signatura Lorentziana

(cf $SO(3)$ donde $\kappa_{ab} = \delta_{ab} \Rightarrow J^2 = \delta_{ab} J^a J^b$)

$\Rightarrow \exists$ "conos de luz" en el álgebra

Las direcciones no son todas equivalentes

en nuestro ejemplo at hand

$P_1 \,\&\, P_2 \neq H$

Combinando $P_1, P_2 \to J^\pm = P_1 \pm i P_2$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} [H, J^\pm] = \pm J^\pm \\ [J^+, J^-] = -2H \end{array}}$$

$\to$ es un + en $SO(3)$

Casimir $C = S_{ab} S^{ab} = H^2 - P_1^2 - P_2^2$

Dirac nos enseñó como construir la irrep.

Clasificamos los estados como autoestados de H y $J^\pm$ les suben y bajan el autovalor

Definimos el "vacío" $|\Omega\rangle$

$$J^-|\Omega\rangle = 0 \longrightarrow (J^+)^n|\Omega\rangle = |n\rangle$$

(a.k.a lowest/highest weight irrep)

$$H|\Omega\rangle = \Delta|\Omega\rangle \Rightarrow H(J^+)^n|\Omega\rangle$$

Calculando el Casimir $\boxed{C|\Omega\rangle = \Delta(\Delta-1)|\Omega\rangle}$ (cf $\ell(\ell+1)$ en $SO(3)$) $= (\Delta+n)|\Omega\rangle$

$\Rightarrow$ el multiplete resulta contener un ∞ de estados

$SO(2,1)$ lowest weight irrep

$$\boxed{\{|\Delta,n\rangle\} \quad n=0,1,2,3\ldots}$$

Δ ↓ Lowest eigenvalue a.k.a lowest weight

a.k.a Discrete series

$|\Omega\rangle = |\Delta,0\rangle \longleftrightarrow$ primario — ϕ_Δ

$\underbrace{(J^+)^n}_{P^n}|\Omega\rangle = |\Delta,n\rangle \rightsquigarrow$ descendientes — $\partial_x^n\phi_\Delta$

en CFT

$D = x^\mu\partial_\mu$

$H = D$

$J^+ = P_\mu$

$J^- = K_\mu$

en higher dim

$$\boxed{[D,P]=P \quad [D,K]=-K \quad [P,K]=-D}$$

Note: $(P)^\dagger = K$

Pero.... ¿por qué cuando hicimos esto con $SO(3)$ el multiplete nos quedó de dimensión finita? ¿La cuenta no es igual? La cuenta es igual, pero nos falta analizar la norma de los estados construidos, debemos garantizar que sea definida positiva. Acá el signo menos que señalamos (group unitario) es crucial. Si tomamos $|\psi\rangle = J^+|\Delta,n\rangle$ ($\propto|\Delta,n+1\rangle$)

$$\langle\Delta,n|\Delta,n\rangle = 1$$

$SO(2,1)$, $SO(3)$:

$$\langle\psi|\psi\rangle = \langle\Delta,n|J^-J^+|\Delta,n\rangle = \pm 2(\Delta+n)^2 - 2\Delta(\Delta-1) + 2(\Delta+n) - 1$$

↳ by product $n=0 \Rightarrow \boxed{\Delta \geq 0}$ a.k.a unitarity bound

$\Rightarrow$ Para $SO(3)$ no podemos actuar indefinidamente con J^+ porque la norma se haría negativa $\Rightarrow \Delta = j$ (a.k.a en $SO(3)$) resulta semientero

$$\boxed{SO(2,1) \rightsquigarrow \text{grupo no compacto} \Rightarrow \text{irrep unitaria es } \infty\text{-dimensional } n=0,1,2,\ldots}$$

Ahora hagamos Wigner analicemos Klein-Gordon en AdS_2

$$(\square_{AdS} - m^2)\Phi = 0$$

$ds^2 = R^2(-ch^2\rho\, dt^2 + d\rho^2)$

↳ Killing vectors

$$\begin{cases} H = i\partial_t \\ P_1 = i(\sin t\, th\rho\, \partial_t - \cos t\, \partial_\rho) \\ P_2 = i(\cos t\, th\rho\, \partial_t + \sin t\, \partial_\rho) \end{cases}$$

Calculemos el Casimir

$$C = H^2 - P_1^2 - P_2^2$$
$$= -\frac{1}{ch^2\rho}\partial_t^2 + \partial_\rho^2 + th\rho\,\partial_\rho$$

Calculemos el box: $\square = \frac{1}{\sqrt{g}}\partial_\mu(\sqrt{g}g^{\mu\nu}\partial_\nu) = \frac{1}{R^2}C^{SO(2,1)}$

$$\boxed{\square_{AdS} = \frac{1}{R^2}C}$$

¡Wow!

$\Rightarrow$ Al resolver $(\square_{AdS} - m^2)\Phi = 0$

estamos fijando el Casimir $\boxed{C = R^2m^2}$

dado que $C = \Delta(\Delta-1)$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta(\Delta-1) = R^2m^2}$$

La masa en KG determina la irrep $\equiv$ el lowest weight $\rightsquigarrow$ La dimensión de escala del op 1ro

(*) es un resultado general $\forall$ AdS.

en AdS_{d+1} la relación resulta

$$\boxed{\Delta(\Delta-d) = m^2R^2}$$

$\rightsquigarrow$ vale p/ $s=0$

AdS_{d+1} $\boxed{\Delta_\pm = d/2 \pm m}$ para fermiones

$$\boxed{\begin{array}{ccc} \Phi,\ m^2 & & O_\Delta \text{ irrep} \\ \text{Campo Cuántico en } AdS_{d+1} & \overset{\text{dual}}{\longleftrightarrow} & \text{en } CFT_d \end{array}}$$

en $AdS_5 \rightsquigarrow$

scalars	$m^2 = \Delta(\Delta-4)$
spin 1/2, 3/2	$\lvert m\rvert = \Delta - 2$
p – form	$m^2 = (\Delta-p)(\Delta+p-4)$
spin2	$m^2 = \Delta(\Delta-4)$

Nota: Las sln de KG se obtienen fácilmente por métodos algebraicos

$$\langle t,\rho \,|\, \Delta, n\rangle = \Psi_n(t,\rho)$$

$$H\Psi_0(t,\rho) = \Delta\cdot\Psi_0(t,\rho) \rightarrow \boxed{\Psi_0(t,\rho) = e^{-i\Delta t} f_0(\rho)}$$

$$J^-\Psi_0(t,\rho)=0 \Rightarrow -ie^{it}(i\,\mathrm{th}\rho\,\partial_t+\partial_\rho)\,e^{-i\Delta t} f_0(\rho)=0$$

$$\Delta\,\mathrm{th}\rho\, f_0 + f_0' = 0 \rightarrow f_0(\rho)=\frac{C}{(\mathrm{Ch}\rho)^\Delta}$$

"worldline Ψ_0"

$$\boxed{\Psi_0(t,\rho) = C\frac{e^{-i\Delta t}}{(\mathrm{Ch}\rho)^\Delta}} \rightsquigarrow$$

Los estados excitados

$$\Psi_n(t,\rho) = (J^+)^n\,\Psi_0 = e^{-i\Delta t}\,(e^{-it})^n \ldots = \underbrace{e^{-i(\Delta+n)t}}_{\text{en } AdS_{d+1}\;\; E_n=\Delta+2n+\ell} f_n(\rho)$$

spherical harmonics

excitado

La sln gral de KG es entonces

$$\boxed{\Phi(t,\rho) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \underbrace{e^{-i(\Delta+n)t} f_n(\rho)}_{\Psi_n(t,\rho)} + a_n^\dagger\,\Psi_n^*(t,\rho)}$$

$$|\Delta\rangle = |\Omega\rangle = a_0^\dagger|0\rangle \longleftrightarrow O_\Delta$$

Kaplan lectures bottom up

$$|\Delta 1\rangle = J^+|\Omega\rangle = a_1^\dagger|0\rangle \longleftrightarrow \partial O_\Delta$$

$\vdots$

AdS bulk — CFT

Note: Breitenlohner-Freedman bound

Volvamos al Casimir $\boxed{\Delta(\Delta-1) = m^2R^2}$

$$\Delta_\pm = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + (mR)^2}$$

dado que $\Delta\in\mathbb{R}$ para que el estado conserve la probabilidad

$$\left(e^{-i(\Delta+n)t}\right)_{\Delta\in\mathbb{R}} \Rightarrow \boxed{(mR)^2 \geq -\frac{1}{4}}$$

BF bound

en AdS_{d+1}: $m^2 \geq -\left(\frac{d}{2}\right)^2$

en AdS la "masa" puede ser negativa, pero no mucho!

Cuando estamos en AdS m^2 no tiene que ver con P_μ sino con el Casimir de $SO(2,d)$

¿Por qué hablamos de un borde en AdS y no hablamos de un borde en el espacio plano? (acaso no son ∞ los 2 espacios)

Back to euclidean space

Flat space $\mathbb{R}^{d+1}$ $\longrightarrow$ $\boxed{ds^2 = d\rho^2 + \rho^2\, d\Omega_d^2} \sim \sqrt{g} = \rho^d\sqrt{g_\Omega}$

Hyp space $EAdS^{d+1}$ $\longrightarrow$ $\boxed{ds^2 = d\rho^2 + L^2\,\mathrm{sh}^2\frac{\rho}{L}\, d\Omega_d^2} \sim \sqrt{g} = \left(L\,\mathrm{sh}\frac{\rho}{L}\right)^d\sqrt{g_\Omega}$

$$Vol_{flat}(Bola(R)) = \int_0^R \rho^d\, d\rho\, \sqrt{g_\Omega} = \frac{R^{d+1}}{d}\,Area(S^d)$$

el vol crece exponencial

$$Vol_{EAdS}(Bola(R)) = \int_0^R L^d\,\mathrm{sh}^d\frac{\rho}{L}\,d\rho \sim L^d\int_0^R e^{\frac{d\rho}{L}}\,d\rho \sim L^{d+1}\frac{e^{\frac{dR}{L}}}{d}\,Area(S^d)$$

$R \gg L$

se comportan igual

el área de una bola de radio R es

$$Area_{flat}(Bola(R)) = R^d\,Area(S^d)$$

$$Area_{EAdS}(Bola(R)) = L^d\left(\mathrm{sh}\frac{R}{L}\right)^d Area(S^d) \sim L^d e^{\frac{dR}{L}}\,Area(S^d)$$

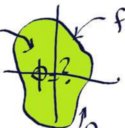
Si contamos g.l. el área tiene el mismo g.l. que todo el bulk

$$\boxed{Vol_{AdS} \sim Area_{AdS}}$$

¿Podemos resolver el problema de Dirichlet de electro en espacio plano poniendo la C.C. en ∞? No

¿en AdS? Si $\leftarrow$ por esto decimos que $\exists$ un borde, veámoslo

Flat space: $\nabla^2\Phi = 0$ $\quad \nabla^2\phi = 0$



$f(\Omega) = \phi]_{\partial D}$

$$\Phi]_{\partial D} = f(\Omega) = \sum_{\ell m} f_{\ell m} Y_{\ell m}(\Omega)$$

veamos que no tiene sentido imponer $\cancel{\Phi(\infty,\Omega) = f(\Omega)}$

La sln la conocemos

$$\nabla^2\Phi = 0 \sim \Phi(\rho,\Omega) = \sum_{\ell m}\left(a_{\ell m} r^\ell + \frac{b_{\ell m}}{r^{\ell+1}}\right) Y_{\ell m}$$

Como los $\neq$ armónicos se comportan $\neq$ no puedo darle sentido a

La tiro pues quiero una sln regular en el interior

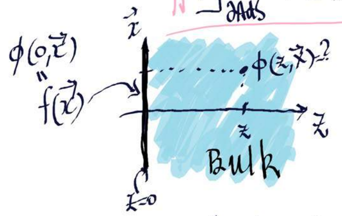
Igualando

$$\sum f_{\ell m} Y_{\ell m} = f(\Omega) = \Phi(R,\Omega) = \sum_{\ell m} a_{\ell m} R^\ell Y_{\ell m} \Rightarrow a_{\ell m} = \frac{f_{\ell m}}{R^\ell} \rightarrow a_{\ell m} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$$

Pero.... AdS es especial!!

Resolvamos $\boxed{\begin{array}{l}\nabla^2_{AdS}\Phi=0\\ \phi\rfloor_{\partial AdS}=f(\vec x)\end{array}}$

$EAdS_{d+1}=H^{d+1}$



Usemos Poincaré coords

$$ds^2=L^2\frac{(dz^2+d\vec x^2)}{z^2}$$

$$\sqrt g=\left(\frac{L}{z}\right)^{d+1}$$

$\vec x = x_i$, $i=1,\dots d$

Jackson nos instruyó ~ busca la sln + gral separando vars

$$\nabla^2_{AdS}=\frac{1}{\sqrt g}\partial_\mu(\sqrt g\, g^{\mu\nu}\partial_\nu) \qquad \mu=z,i$$

$$=\frac{z^{d+1}}{\cancel{L^{d+1}}}\left[\partial_z\left(\frac{\cancel{L^{d+1}}}{z^{d+1}}z^2\partial_z\right)+\partial_i\left(\frac{\cancel{L^{d+1}}z^2}{z^{d+1}}\partial_i\right)\right]$$

$$=z^{d+1}\partial_z\left(z^{1-d}\partial_z\right)+z^2\partial_i\partial_i$$

$$\Longrightarrow \boxed{z^{d+1}\partial_z\left(z^{1-d}\partial_z\Phi\right)+z^2\partial_i\partial_i\Phi=0}$$

Massless KG eqn en AdS

Separamos vars $\Phi(z,\vec x)=f(z)e^{i\vec p\cdot\vec x}$

$$\partial_z\left(z^{1-d}\partial_z f\right)+z^{1-d}(-\vec p^2)f=0$$

$p=|\vec p|$

La sln para f es:

$$f(z)=z^{d/2}\left[A\, K_{\frac d2}(pz)+\cancel{B\, I_{\frac d2}(pz)}\right]$$

Bessell functions

e^{-pz} ok en el bulk

singular en el interior

e^{pz} cuando $z\to\infty$ (interior)

cerca la frontera $z=0$: $K_\nu(pz)\sim\#(pz)^{-\nu}+\#(pz)^{\nu}$

explota $z\to0$

decae en $z\to0$

$$\boxed{f(z)=\#\,z^0+\#\,z^d+\dots} \qquad z\to0$$

p. independent

Leading (a.k.a source)

Subleading (a.k.a vev)

near the boundary

El decaimiento cerca del borde es el mismo $\forall$ los modos $\vec p$

De manera que la sln regular en EAdS es

$$\Phi(z,\vec x)=\int d\vec p\; A(\vec p)\,e^{i\vec p\cdot\vec x}\,\frac{(pz)^{d/2}K_{\frac d2}(pz)}{\Gamma\left(\frac d2\right)2^{d/2-1}}$$

lo elijo para normalizar a 1

ya que $(pz)^{d/2}K_{d/2}(pz)\xrightarrow[z\to0]{}\Gamma\left(\frac d2\right)2^{d/2-1}$

de manera que dado un dato en el borde

$$f(\vec x)=\int d\vec p\;\tilde f(\vec p)\,e^{i\vec p\cdot\vec x}$$

$$\Longrightarrow A(p)=\tilde f(p)$$

$\Longrightarrow$ La sln de $\nabla^2_{AdS}\Phi=0$

$$\phi(0,\vec x)=\Phi\rfloor_{\partial AdS}=f(\vec x)$$

es

$$\boxed{\phi(z,\vec x)=\int d\vec p\;\tilde f(\vec p)\,e^{i\vec p\cdot\vec x}\,\frac{(pz)^{d/2}K_{d/2}(pz)}{\Gamma\left(\frac d2\right)2^{d/2-1}}}$$

Componentes de Fourier de la condición de borde.

Si resolvemos para un campo masivo

$$(-\nabla^2_{AdS}+m^2)\Phi=0 \quad \oplus \quad \text{C.C. "}\Phi\rfloor_{\partial AdS}=f(\vec x)\text{"}$$

Requiere una regularización

Si hacemos el mismo análisis

$$\Phi(z,\vec x)=e^{i\vec p\cdot\vec x}f(z)$$

$$f(z)=z^{d/2}\left(A\,K_\nu(pz)+\cancel{B\,I_\nu(pz)}\right)$$

donde $\nu=\sqrt{\left(\frac d2\right)^2+m^2}$

$\Longrightarrow$ cerca del borde

$$f(z)=\#\,z^{\Delta_-}+\#\,z^{\Delta_+}+\dots$$

$\Delta(\Delta-d)=m^2$

$$\boxed{\Delta_\pm=\frac d2\pm\nu}$$

$\leftarrow$ sln

$\nu=\sqrt{\left(\frac d2\right)^2+m^2}$

leading a.k.a non normalizable

subleading normalizable

slns de la ec indicial $\Delta(\Delta-d)=m^2$

$$\boxed{\Delta_++\Delta_-=d}$$

Nuevamente, el comportamiento de la sln cerca del borde es indep de $\vec p$!!

Genéricamente $z^{\Delta_-}\xrightarrow[z\to0]{}\infty$

$\Longrightarrow$ la manera correcta de imponer la CC es $\phi(z,\vec x)\xrightarrow[z\to0]{}z^{\Delta_-}f(\vec x)$