Intro AdS|CFT   Crítico   Lima 2020

Clase IV: AdS | CFT connection

$(\partial A + g[A,A])^2 = F_{\mu\nu}^2 = (\partial_\mu A_\nu)^2 + g^2[A,A]^2 + 2g[A,A]\partial A$

't Hooft '70s

$$\boxed{\begin{array}{ccc} \text{Gauge theory (Matrices)} & \longleftrightarrow & \text{String theory} \\ N \approx \text{size of matrices} & & g_s = \frac{1}{N^2} \end{array}}$$

$N \to \infty$ ⟿ cuerdas libres

Malda '97

$$\boxed{\begin{array}{ccc} \mathcal{N}=4 \text{ SYM} & & \text{IIB strings} \\ SU(N) & \longleftrightarrow & \text{in } AdS_5 \times S^5 \\ 3+1 \ \text{quantum CFT} & & 9+1 \end{array}}$$

Parámetros:

$N \longleftrightarrow l_s$ (string length), R_{AdS}

$g_{YM}^2 N = \lambda$ ('t Hooft coup) $\quad g_s$ (string coupling)

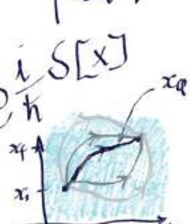
$$\boxed{\lambda = \frac{R_{AdS}^4}{l_s^4}}$$

$$\boxed{\frac{\lambda}{N} = g_s}$$

Límite clásico: ¿qué es? • $\hbar \to 0$ • Large Q#

En la formulación de Feynman (integrales de camino) el límite es muy natural a.k.a Saddle point

$$\langle x_f, t_f | x_i, t_i \rangle = \langle x_f | e^{-iH(t_f - t_i)} | x_i \rangle = \int_{x(t_i)=x_i}^{x(t_f)=x_f} \mathcal{D}x \, e^{\frac{i}{\hbar} S[x]}$$



en el límite $\hbar \to 0$ la trayectoria que extremiza el exponente es la dominante

$$\boxed{\langle x_f, t_f | x_i, t_i \rangle \underset{\hbar \to 0}{\sim} e^{i/\hbar \, S[x_{cl}]} \Big|_{x_{cl}(t) \,/\, x_{cl}(t_i)=x_i,\ x_{cl}(t_f)=x_f}} \quad \text{DIRAC}$$

't Hooft limit:

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} N \to \infty \\ g_{YM} \to 0 \end{array}\right\} \lambda = g_{YM}^2 N = \text{fixed} \begin{array}{l} \ll 1 \\ \gg 1 \end{array}}$$

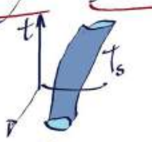
Genéricamente en este límite dominan los diagramas planares en QFT y la teoría de cuerdas es libre: $\bigcirc + g_s^2 (\ldots) + g_s^4 (\ldots) + \ldots$ ($\frac{1}{N^2}$, $\frac{1}{N^4}$) no loops

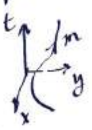
En la realización de J.M. donde las teorías en ambos lados son bien concretas ⟿ $\boxed{\lambda = \frac{R^4}{l_s^4}}$

Las cuerdas se propagan en AdS con radio R_{AdS}^2

$$\boxed{S_{\text{cuerdas}} = T_s \int d\text{Area}}$$

⟶ análogo a $S_{\text{part}} = m \int ds$





$T = \frac{\text{Masa}}{\text{Long}} \sim \frac{1}{l_s^2}$

$T_F = T_s = \frac{1}{2\pi\alpha'}$, $\alpha' = l_s^2$

$$\frac{1}{\hbar} = \frac{R_{AdS}^2}{l_s^2} \int d^2\sigma \sqrt{-h_{\alpha\beta}}$$

métrica inducida sobre la superficie

$$\boxed{T_{eff} = \frac{R_{AdS}^2}{l_s^2} \sim \sqrt{\lambda}}$$

⟹ en el límite de acoplamiento fuerte en la teoría de gauge, la cuerda es muy rígida ⟿ no la puedo excitar $\lambda \gg 1$

⟿ a.k.a límite de gravedad

Solo contribuyen los estados de más baja energía

Summary

$$\boxed{\begin{array}{ccc} \text{LARGE N Gauge theory acoplamiento fuerte} & \longleftrightarrow & \text{Teoría de Gravedad (clásica) } d+1 \\ d & \boxed{CFT_d \leftrightarrow AdS_{d+1}} & \end{array}}$$

Teoría de cuerdas (semi) clásicas = Cuerdas muy rígidas

Veamos como una cuenta ~~semiclásica~~ en AdS_{d+1} da cuenta de un fenómeno cuántico en CFT_d

Gubser-Klebanov-Polyakov-Witten (GKPW) prescription

¿Qué calculamos en una CFT?

Funciones de correlación de op ^{1} pos

$$\langle \mathcal{O}_{\Delta_1}(x_1) \dots \mathcal{O}_{\Delta_n}(x_n) \rangle = \frac{1}{Z}\int \mathcal{D}A_\mu \, e^{-F_{\mu\nu}^2} \mathcal{O}_{\Delta_1} \cdots \mathcal{O}_{\Delta_n}$$

$$Z = \int \mathcal{D}A_\mu \, e^{-F_{\mu\nu}^2}$$

donde $\mathcal{O}_\Delta = \mathcal{F}(A_\mu)$ ← Gauge invariant

$= \mathrm{tr}\, F_{\mu\nu}^2$

Consideremos 1 solo tipo de operador $\mathcal{O}_\Delta(x)$.

Si calculamos

$$\boxed{Z_{CFT}[J] = \frac{1}{Z[0]}\int \mathcal{D}A_\mu \, e^{-S[A_\mu] + \int J(x)\mathcal{O}_\Delta(x) d^d x}}$$

fuente externa ; op en CFT

Podemos hallar la función de correlación de n ptos haciendo

$$\frac{\delta^n Z_{CFT}[J]}{\delta J(x_1) \dots \delta J(x_n)} = \frac{1}{Z[0]} \int \mathcal{D}A_\mu \, e^{-S[A_\mu]} \mathcal{O}_\Delta(x_1) \dots \mathcal{O}(x_n) e^{\int J \mathcal{O}_\Delta}$$

$$\boxed{\left.\frac{\delta^n Z_{CFT}[J]}{\delta J(x_1) \dots \delta J(x_n)}\right|_{J=0} = \frac{1}{Z[0]} \int \mathcal{D}A_\mu \, e^{-S[A]} \mathcal{O}_\Delta(x_1) \dots \mathcal{O}_\Delta(x_n) = \langle \mathcal{O}_\Delta(x_1) \dots \mathcal{O}_\Delta(x_n) \rangle}$$

$Z_{CFT}[J]$ = a.k.a funcional generatriz

$Z_{CFT}[J] \longrightarrow$ permite calcular n-pt correlation functions of $\mathcal{O}_\Delta$

Ahora imaginamos que queremos calcular una path integral en el AdS bulk (Euclídeo)

$$\Longrightarrow \boxed{\underbrace{\int \mathcal{D}g_{\mu\nu}}_{\text{gravity field on AdS}} \mathcal{D}\Phi \, e^{-\cancel{i} S[g_{\mu\nu}, \Phi]} = Z_{GRAV}}$$

$N^2 \to \infty$

$\Longrightarrow$ necesitamos dar C.C. para los campos en AdS $\Phi\big|_{\partial AdS} = \phi_0(\vec{x}), \dots$

$\Longrightarrow$ en el límite semiclásico

$$\boxed{Z_{GRAV}[\phi_0(\vec{x}), \dots] \sim e^{-S_{GRAV}[\Phi_{cl}]} \quad \text{con } \Phi_{cl}\big|_{\partial AdS} = \phi_0(\vec{x})}$$

¿Qué proponen estos muchaches?

$$\boxed{Z_{CFT}[J] = Z_{GRAV}[\phi_0]}, \qquad \phi_0 = \Phi\big|_{\partial AdS}, \quad \phi_0 = J$$

Z_{CFT}: generatriz de funciones de correlación $\mathcal{O}_\Delta$

	CFT	GRAV	
fuente	$J(x)$	$\longleftrightarrow$ $\phi_0 = \Phi\big\|_{\partial AdS}$ (bdy data) ; $J = \phi_0$	
operador escalar	$\mathcal{O}_\Delta$	$\longleftrightarrow$ Φ	
dimensión escala	Δ	$\longleftrightarrow$ m^2	MASA
energy momentum tensor	$T_{\mu\nu}$	$\longleftrightarrow$ g_{MN}	graviton
Corriente conservada	$\partial_\mu J^\mu = 0$	$\longleftrightarrow$ A_M	Gauge field

Chequeemoslo: Resolvamos

$$\left.\begin{array}{l}(\Box_{AdS}-m^2)\,\Phi=0\\ \text{“}\Phi\big|_{\partial AdS}=\phi_0(\vec{x})\text{”}\end{array}\right\}$$

“ó $z=0$”

→ La manera apropiada es imponer la CC en $z=\epsilon$, hacer la cuenta y tomar $\epsilon\to 0$ al final

Debido al volumen ∞ de AdS regularizamos el problema

El problema a resolver es

a.k.a. Dirichlet b.c.

$$\left\{\begin{array}{l}(\Box_{AdS}-m^2)\Phi=0\\ (+)\\ \Phi(\epsilon,\vec{x})=\epsilon^{\Delta_-}\phi_0(\vec{x})\end{array}\right. \Rightarrow \boxed{\Phi_{cl}(z,\vec{x})=\int d\vec{p}\; e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}}\,\epsilon^{\Delta_-}\tilde{\phi}_0(\vec{p})\,\frac{z^{d/2}K_\nu(p\cdot z)}{\epsilon^{d/2}K_\nu(p\epsilon)}}$$

↳ arbitrario

cuando evalúo en $z=\epsilon$ y recupero la C.C. ($\to 1$)

Ahora evaluemos la acción on-shell (a.k.a. límite semiclásico de la path integral)

$$S[\Phi_{cl}]=\int\frac{dz\,d\vec{x}}{z^{d+1}}\left(\partial_\mu\Phi_{cl}\partial_\mu\Phi_{cl}+m^2\Phi_{cl}^2\right)$$

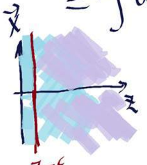
AdS: $d^{d+1}x\sqrt{g}$

$\int$ integro por partes

$$=\int d^{d+1}x\left[\sqrt{g}\,g^{\mu\nu}\partial_\mu\Phi\partial_\nu\Phi+\sqrt{g}\,m^2\Phi^2\right]$$

$$=\int d^{d+1}x\left[\partial_\mu(\sqrt{g}\,g^{\mu\nu}\Phi_{cl}\partial_\nu\Phi_{cl})-\Phi_{cl}\frac{\sqrt{g}}{\sqrt{g}}\partial_\mu(\sqrt{g}\,g^{\mu\nu}\partial_\nu\Phi_{cl})+\sqrt{g}\,m^2\Phi_{cl}\Phi_{cl}\right]$$

$$=-\int d^dx\,\sqrt{g}\,g^{zz}\,\Phi_{cl}\,\partial_z\Phi_{cl}\Big|_{z=\epsilon}+\int d^{d+1}x\sqrt{g}\,[\Phi_{cl}\underbrace{(-\Box+m^2)\Phi_{cl}}_{0}]$$



$$=-\int\frac{d^dx\,\epsilon^2}{\epsilon^{d+1}}\epsilon^{\Delta_-}\phi_0(\vec{x})\int d\vec{p}\,\frac{\epsilon^{\Delta_-}e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}}\tilde{\phi}_0(\vec{p})}{\epsilon^{d/2}K_\nu(p\epsilon)}\cdot\partial_z\left(z^{d/2}K_\nu(p\cdot z)\right)\Big|_{z=\epsilon}$$

Ahora analizaremos esta expresión. La cuestión es algo delicada pues al final tenemos que tomar $\epsilon\to 0$

De manera que nos importan los términos más dominantes en $\epsilon\to 0$

Reexpresando $\phi_0(\vec{x})=\int\frac{d\vec{k}}{(2\pi)^d}e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}\tilde{\phi}_0(\vec{k})$ resulta

$$S[\phi_0]=-\int\frac{d^dx\,d\vec{p}\,d\vec{k}}{\epsilon^{\frac{d}{2}-1-\Delta_-}(2\pi)^d}\,\tilde{\phi}_0(\vec{k})\,e^{i(\vec{k}+\vec{p})\cdot\vec{x}}\,\tilde{\phi}_0(\vec{p})\,\cdot\underbrace{\frac{\partial_z\left(z^{d/2}K_\nu(p\cdot z)\right)}{K_\nu(p\cdot\epsilon)}\Big|_{z=\epsilon}}_{\mathcal{F}(p,\epsilon)}$$

$=(2\pi)^d\delta(\vec{k}+\vec{p})$

$$=-\int\frac{d\vec{p}}{\epsilon^{\frac{d}{2}-1+2\nu}}\tilde{\phi}_0(-\vec{p})\,\mathcal{F}(p,\epsilon)\,\tilde{\phi}_0(\vec{p})$$

$$\mathcal{F}(p,\epsilon)=\frac{\partial_z\left(z^{d/2}K_\nu(pz)\right)}{K_\nu(p\cdot\epsilon)}\Big|_{z=\epsilon}$$

Ahora usamos $K_\nu(x)=x^\nu\frac{\Gamma(\nu)}{2^{1+\nu}}+x^{-\nu}\frac{\Gamma(-\nu)}{2^{1-\nu}}+\dots$

$$\left(z^{d/2}K_\nu(pz)=p^\nu\frac{\Gamma(\nu)}{2^{1+\nu}}z^{\Delta_+}+p^{-\nu}\frac{\Gamma(-\nu)}{2^{1-\nu}}z^{\Delta_-}\right)$$

$$=\frac{p^\nu\frac{\Gamma(\nu)}{2^{1+\nu}}\Delta_+\cdot z^{\Delta_+-1}+p^{-\nu}\frac{\Gamma(-\nu)}{2^{1-\nu}}\Delta_-z^{\Delta_--1}}{p^\nu z^\nu\frac{\Gamma(\nu)}{2^{1+\nu}}+p^{-\nu}z^{-\nu}\frac{\Gamma(-\nu)}{2^{1-\nu}}}\Bigg|_{z=\epsilon}$$

$$=\frac{\cancel{p^{-\nu}\Gamma(-\nu)}\,\epsilon^{\Delta_--1}\cancel{/2^{1-\nu}}}{\cancel{p^{-\nu}}\,\epsilon^{-\nu}\cancel{\Gamma(-\nu)/2^{1-\nu}}}\;\frac{\left(\Delta_-+\frac{p^{2\nu}}{2^{2\nu}}\Gamma(\nu)/\Gamma(-\nu)\,\Delta_+\,\epsilon^{\Delta_+-\Delta_-}\right)}{\left(1+\frac{p^{2\nu}}{2^{2\nu}}\epsilon^{2\nu}\frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(-\nu)}\right)}$$

$\Delta_+-\Delta_-=2\nu$

$$\boxed{\mathcal{F}(p,\epsilon)=\epsilon^{\frac{d}{2}-1}\left(\Delta_-+\cancel{X}\,\epsilon^{2\nu}p^{2\nu}+\dots\right)}$$

↓ divergente pero “contact” term

↳ va a dar una contribución finita

$$\Rightarrow\boxed{S_{grav}[\phi_0]=\int d\vec{p}\;\tilde{\phi}_0(\vec{p})\,p^{2\nu}\,\tilde{\phi}_0(-\vec{p})}$$

↓ back to config space

$\sim\frac{1}{L^{d+2\nu}}=\frac{1}{L^{2\Delta_+}}$

$\Delta_+=\frac{d}{2}+\nu$

$$=\int d^dx\,d^dy\;\phi_0(x)\frac{1}{|x-y|^{2\Delta_+}}\phi_0(y)$$

$$Z_{CFT}[\phi_0] = \underbrace{e^{-\int \phi_0(x) \frac{1}{|x-y|^{2\Delta_+}} \phi_0(y)}}_{Z_{GRAV}[\phi_0]}$$

boundary data

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\left.\frac{\delta^2 Z_{GRAV}}{\delta\phi_0(x)\,\delta\phi_0(y)}\right|_{\phi_0=0} = \frac{1}{|x-y|^{2\Delta_+}}}$$

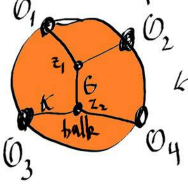
Luego $Z_{GRAV} = Z_{CFT}[\phi_0]$

↳ generatriz de op 1ros de dimensión Δ_+

$$\boxed{\begin{array}{ccc} m^2 & \longleftrightarrow & \Delta_+ \\ \Phi \text{ bulk} & & O_{\Delta_+} \end{array}}$$

Al considerar vértices en el bulk resuelvo KG + interacciones de manera perturbativa

a.k.a. Witten Diagram



$\longleftrightarrow \langle O_1 O_2 O_3 O_4 \rangle$