Introducción AdS/CFT — Lima 2020

Plan:
1. AdS
2. CFT
3. AdS/CFT
4. Wilson loops

Refs:
- McGreevy, Open Course MIT
- Ramallo, 1310.4319
- Nat Sundrum, 1409.3575
- Freedman - D'Hoker, 0201253
- Kaplan, lectures AdS/CFT
- Malda, TASI 2003 0309246

Motivación:

¿Qué es una QFT? (Wilson '70)

$\boxed{\text{Es estudiar el flujo del grupo de renormalización.}}$

UV ← g.l$_{UV}$ = microscopic / fundamental

RG flow

IR — gl$_{IR}$ = effective / collective

Al estudiar un sistema físico a ≠ energías, los g.l. se reorganizan y la descripción efectiva (baja energía) puede resultar en términos de g.l$_{IR}$ muy ≠ a los que usamos inicialmente para formular la teoría

Ej: QCD

UV: g.l. quarks y gluones

↓

IR: g.l son piones y nucleones n/p

$\underbrace{\text{piones y nucleones}}_{\text{estados ligados de quarks y gluones}}$

¿Cuál es la QFT más simple?

$\boxed{\text{CFT = QFT que no depende de la escala}}$

Malda '97

$$\boxed{CFT_d = AdS_{d+1}}$$

En términos + grales:

$\boxed{\text{“teorías gauge}_d \text{ = gravedad dinámica}_{d+1}\text{”}}$ (sin gravedad dinámica)

Conceptualmente la correspondencia involucra 2 ideas

→ Holografía: Aparición de una “coordenada holográfica” $\boxed{z \longleftrightarrow \text{energía}}$

→ Dualidad: los g.l para describir el sistema dependen del régimen que me interese estudiar.

• Pragmáticamente: la correspondencia provee una herramienta de cálculo que permite estudiar:

$\boxed{\text{fenómenos no perturbativos (cuánticos) de teorías de gauge (acoplamiento fuerte)} \xleftrightarrow{\text{dualidad}} \text{teoría de gravedad clásica perturbativa}}$

$\boxed{\text{“Large N gauge theory} \longleftrightarrow \text{Semiclassical gravity”}}$

dominada por saddle point (sln clásica)

$$Z_{QFT} = Z_{AdS}$$

$$\mathcal{H}_{QFT} = \mathcal{H}_{AdS\,QG}$$ → los espacios de Hilbert son idénticos

QFT $T \neq 0$, $\mu \neq 0$ ↔ Charged AdS BH

Alc Castro

Plan: entender estos statements

Bottom line $\boxed{RG = GR}$

Clase 1 : AdS : anti de Sitter

$$\boxed{\text{AdS} = \text{espacio maximalmente simétrico de curvatura negativa}}$$

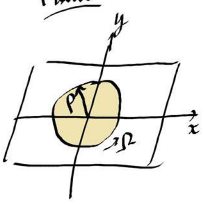
$$\boxed{R_{\mu\nu} = \Lambda\, g_{\mu\nu}} \qquad \Lambda < 0$$

MAX simétricos (Euclídeos)

- plano: $\mathbb{R}^{n+1}$, Curvat. = 0: $\boxed{ds^2 = d\rho^2 + \rho^2\, d\Omega_n^2}$
- esfera: S^{n+1}, Curvat. $\propto \frac{1}{R^2}$: $\boxed{ds^2 = R^2\left(d\rho^2 + \sin^2\rho\; d\Omega_n\right)}$
- plano hiperbólico H^{n+1}, Curvat. $\propto -\frac{1}{R^2}$: $\boxed{ds^2 = R^2\left(d\rho^2 + \mathrm{sh}^2\rho\; d\Omega_n\right)}$

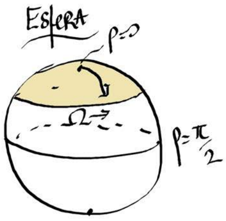
R = escala característica del espacio

Plano



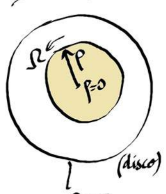
$ISO(n+1)$

Esfera



$SO(n+2)$

Plano hiperbólico



$SO(n+1,1)$

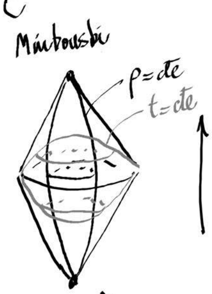
Grupo de isometría

$$\Lambda = -\frac{d(d-1)}{2L^2}$$

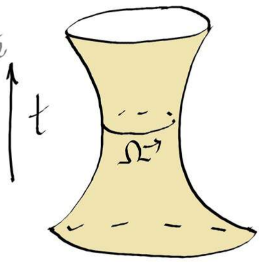
Signatura Lorentziana:

Minkowski	de Sitter	anti de Sitter
$ds^2 = -dt^2 + d\rho^2 + \rho^2 d\Omega_{d-1}$	$ds^2 = L^2\left(-dt^2 + \mathrm{ch}^2 t\, d\Omega_d\right)$	$ds^2 = L^2\left(-\mathrm{ch}^2\rho\, dt^2 + d\rho^2 + \mathrm{sh}^2\rho\, d\Omega_{d-1}\right)$
$\mathbb{R}^{1,d}$	dS_{d+1}	AdS_{d+1}
$ISO(d,1)$ $\Lambda = 0$	$SO(d+1,1)$ $\Lambda > 0$	$SO(d,2)$ $\Lambda < 0$

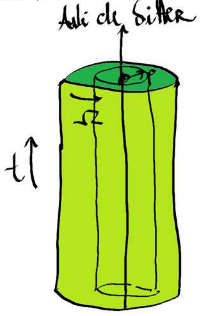
¿Cómo visualizamos estos espacios?



Mink

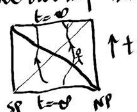


dS (piel del hiperboloide)



AdS (cilindro MACIZO)

diagramas Penrose (Nobel 2020) Conformes



En analogía con la esfera, los espacios maximalmente simétricos pueden ser entendidos como (hiper)-superficies en un embedding space plano de una dimensión más.

- $H^{d+1} = EAdS_{d+1}$ (Euclídeo)

$$\boxed{-Y_-^2 + Y_0^2 + \vec{Y}^2 = -L^2}$$

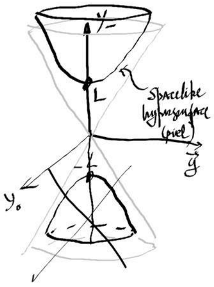
embebido en $\mathbb{R}^{1,d+1}$

$$ds^2 = -dY_-^2 + dY_0^2 + d\vec{Y}^2$$
$$\vec{Y} = (y_1, \ldots y_d)$$

$-L^2 = (y_-, y_0, \vec{y}) \begin{pmatrix} - & \\ & + \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_- \\ y_0 \\ \vec{y} \end{pmatrix}$ η_{AB}

$y^A \to \tilde{y}^A = R^A{}_B\, y^B$

es simetría si $R^A{}_M R^B{}_N\, \eta_{AB} = \eta_{MN}$



Al entenderlo de esta manera, las isometrías del espacio son evidentes $\boxed{SO(d+1,1)}$ $EAdS_{d+1}$

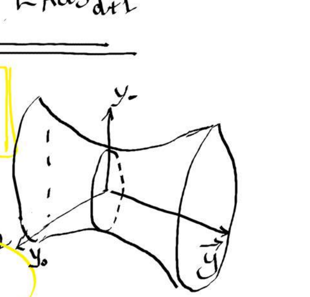
- AdS_{d+1} (Lorentzian)

$$\boxed{-Y_-^2 - Y_0^2 + \vec{Y}^2 = -L^2}$$

embebida en $\mathbb{R}^{2,d}$

$$\boxed{SO(d,2)} \text{ Isometry}$$

$$ds^2 = -dY_-^2 - dY_0^2 + d\vec{Y}^2$$
$$\vec{Y} = (y_1, \ldots y_d)$$



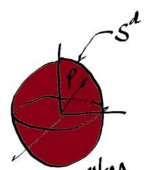
Existen ≠ maneras de resolver el vínculo (hiperboloide).

2 sist coord populares ⟶ Poincare / Globales

Globales:

- $EAdS_{d+1}$ ~ $y_- = L\,\mathrm{ch}\tilde\rho$

  $(y_0, \vec y) = L\,\mathrm{sh}\tilde\rho\, n^i$, $n^i n^i = 1$, $i = 0,\dots,d$, $n \in \mathbb{R}^{d+1}$



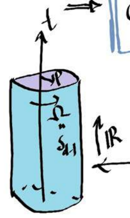
$$\Rightarrow \boxed{ds^2 = L^2\left(d\tilde\rho^2 + \mathrm{sh}^2\tilde\rho\, d\Omega_d\right)}$$

El borde de AdS ~ "$\tilde\rho \to \infty$" $\boxed{\partial EAdS_{d+1} = S^d}$

- AdS_{d+1} ~ $y_- = L\,\mathrm{ch}\rho\cos t$, $\vec y = L\,\mathrm{sh}\rho\,\vec n$, $\vec n^2 = 1$

  $y_0 = L\,\mathrm{ch}\rho\sin t$, $\vec n \in \mathbb{R}^d$

$$\Rightarrow \boxed{ds^2 = L^2\left(-\mathrm{ch}^2\rho\, dt^2 + d\rho^2 + \mathrm{sh}^2\rho\, d\Omega_{d-1}\right)}$$ AdS en Global Coords



$\partial AdS_{d+1} = \underbrace{\mathbb{R}\times S^{d-1}}_{\text{piel}}$ (borde $\rho\to\infty$)

Poincare (horospherical in old lits)

$$\left.\begin{array}{l} y_- + y_d = L/z \\ y^\mu = L\,\dfrac{x^\mu}{z} \end{array}\right\} \Rightarrow y_- - y_d = \frac{z}{L}\left(L^2 + L^2\frac{(x^\mu)^2}{z^2}\right)$$

$\mu = 0,\dots,d-1$

donde $(x^\mu)^2 = \pm(x^0)^2 + (x^1)^2 + \dots + (x^{d-1})^2$

↑ dependiendo de euclid/Lorentz signat

⟹ AdS en Coord Poincare

$$\boxed{ds^2 = L^2\,\frac{(dx^\mu)^2 + dz^2}{z^2}}$$

a.k.a z: "Coord Radial" Coord holográfica

El borde de AdS corresponde a $z \to 0$ "$\partial AdS_{d+1} = \mathbb{R}^d$"

En coordenadas de Poincare las isometrías $\underset{(\text{Poinc})}{ISO(d)} \subset SO(d+1,1)$ son explícitas y actúan sobre (hiper)-superficies $z = $ cte

$$\left\{\begin{array}{l} z = \text{cte} \\ x^\mu \to \tilde x^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu \end{array}\right.$$

$\Lambda = e^{M_{\rho\sigma}\omega^{\rho\sigma}}$; $M_{\mu\nu}$, P_μ = ISO

Existe otra simetría obvia

Dilatación $\left\{\begin{array}{l} x^\mu \to \lambda x^\mu \\ z \to \lambda z \end{array}\right.$ ⟶ D

Existe otra (no obvia)

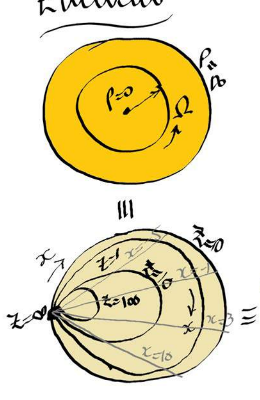
a.k.a Special Conformal

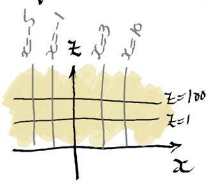
$$\left\{\begin{array}{l} z \to \tilde z = \dfrac{z}{1 + 2b\cdot x + b^2(x^2+z^2)} \\[2ex] x \to \tilde x^\mu = \dfrac{x^\mu + b^\mu(x^2+z^2)}{1 + 2b\cdot x + b^2(x^2+z^2)} \end{array}\right. \longrightarrow K^\mu$$

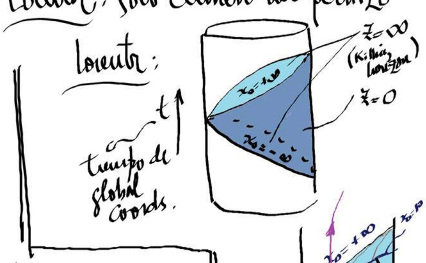
Naturalmente, el álgebra de simetría $\{M_{\mu\nu}, P_\mu, K_\mu, D\} \simeq SO(d+1,1)$ / $SO(d,2)$ dependiendo de la signatura

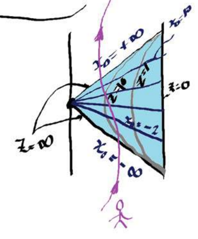
Caveat: $\{x^\mu, z\}$ ⟶ Euclideo: cubren toda la variedad

⟶ Lorentz: sólo cubren un pedazo









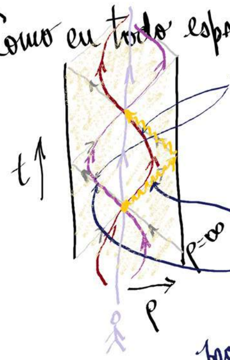
Notas: • En signatura Lorentziana
$t \leftrightarrow x^0$
son $\neq$ nociones de tiempo (recall Schwarzschild)

• Las isometrías de AdS actúan de forma cerrada sobre el borde ($z=0$), esto es, mapean puntos del borde a puntos del borde

• La teoría CFT (dual) va a estar definida en el borde
"$z=0$" Poinc
"$\rho=\infty$" Glob

Lorentzian AdS es una caja!

Como en todo espaciotiempo, estudiemos geodésicas

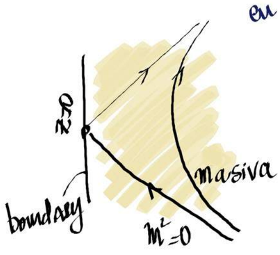


timelike geods = no pueden alcanzar el borde
(massive)

"AdS actúa como un pozo de potencial"

lightlike geods: llegan en tiempo al borde
(massless)

propio finito de un observador en reposo en el interior



• Decimos que AdS confina las partículas a vivir en el interior (Bulk)

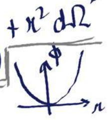
Podemos ver esto cualitativamente de la métrica:

$$ds^2 = L^2\left(-\mathrm{ch}^2\rho\, dt^2 + d\rho^2 + \mathrm{sh}^2\rho\, d\Omega^2\right)$$

$\mathrm{sh}\rho = \frac{r}{L}$

$$= -\underbrace{\left(1+\left(\frac{r}{L}\right)^2\right)}_{g_{tt}} dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1+\left(\frac{r}{L}\right)^2\right)} + r^2 d\Omega^2$$

$g_{tt} \Rightarrow \phi \sim \frac{1}{L^2} r^2 \Rightarrow$



$\phi = -\frac{GM}{r}$ $\Uparrow$

cf Schwarzschild
$1+2\phi = 1 - \frac{2GM}{r}$

Podemos hacer la afirmación más precisa
"AdS = Gravitational Box = harmonic potential"

Cuanticemos una partícula en AdS_2:

AdS QM:
($\mathrm{th}\frac{x}{2} = \mathrm{th}\frac{\rho}{2}$)

$$\frac{ds^2}{L^2} = -\mathrm{ch}^2\rho\, dt^2 + d\rho^2$$
$$= \frac{1}{\cos^2 x}\left(-dt^2 + dx^2\right)$$

$x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

trayectoria $X^\mu(\lambda) = (t(\lambda), x(\lambda))$

fijemos $\lambda = t \rightsquigarrow \dot{x}^\mu = (1, \dot{x})$, $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$

• $S = -m\int ds$
$= -m\int d\lambda \sqrt{-g_{\mu\nu}(x)\,\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu}$
$= -mL\int \frac{dt}{\cos x}\sqrt{1-\dot{x}^2}$ ← Casi Minkowski excepto por

• $H = p\dot{q} - L = \sqrt{p^2 + \frac{(mL)^2}{\cos^2 x}}$ → se hace muy masiva cerca del borde.

• $[x,p] = i \rightsquigarrow p = -i\partial_x$

$$\boxed{i\partial_t \psi = H\psi}$$ con $H = \sqrt{-\partial_x^2 + \frac{m^2}{\cos^2 x}}$

• Me molesta la $\sqrt{}$, elevo al cuadrado

$$\boxed{-\partial_t^2\psi = H^2\psi = \left(-\partial_x^2 + \frac{(mL)^2}{\cos^2 x}\right)\psi}$$

nothing but Klein-Gordon eqn $(\Box - m^2)\psi = 0$

• Las simetrías de AdS_2 → Killing vectors $SO(2,1)$

$H = i\partial_t$
$P_1 = i(\sin t \sin x\, \partial_t - \cos t \cos x\, \partial_x)$ →
$P_2 = i(\cos t \sin x\, \partial_t + \sin t \cos x\, \partial_x)$

$[P_2, H] = iP_1$
$[H, P_1] = iP_2$
$[P_1, P_2] = -iH$

$\Rightarrow J^\pm = P_1 \pm iP_2$
$[H, J^\pm] = \pm J^\pm$ y $[J^+, J^-] = -2H$ $\Rightarrow$ $J^-|0\rangle = 0$
$|n\rangle = (J^+)^n|0\rangle \Rightarrow \boxed{E_n = E_0 + n}$