Info AdS/CFT

Clase II: CFT

Lima 2020

. Di francesco, CFT yellow book

. Osborn, lectures CFT DAMTP

¿Qué es una CFT? Es una teoría cuántica de campos invariante (a nivel cuántico) bajo el grupo Conforme.

Grupo conforme: grupo de transformaciones (diffeos) que dejan invariante la métrica a menos de un factor de escala ~ "Transformaciones planas que preservan los ángulos"

Math: nos interesa hallar aquellos diffeos → $x = \tilde{x} - \xi(x)$

$$x^\mu \to \tilde{x}^\mu = x^\mu + \xi^\mu(x) + \ldots$$

↳ infinitesimal, generador del diffeo

tales que
$$\tilde{g}_{\mu\nu}(\tilde{x}) = \frac{\partial x^\rho}{\partial \tilde{x}^\mu}\frac{\partial x^\sigma}{\partial \tilde{x}^\nu} g_{\rho\sigma}(x)$$
$$\underbrace{\tilde{g}_{\mu\nu}}_{\Omega^{-2}(x) g_{\mu\nu}(x)}$$
$$\hookrightarrow \frac{\partial x^\mu}{\partial \tilde{x}^\nu} = \delta^\mu_\nu - \partial_\nu \xi^\mu + \ldots$$

Mas fancy $\boxed{\mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu} = f(x)\, g_{\mu\nu}}$ ← a.k.a CKV Conformal Killing Vector

Vamos a buscar los CKV de espacio plano $g_{\mu\nu} = \begin{cases} \delta_{\mu\nu} & \text{Euclídeo} \\ \eta_{\mu\nu} & \text{Lorentziano} \end{cases}$

Naturalmente, el conjunto de CKV cierra un álgebra ⤳ álgebra del grupo conforme

Consideremos $\tilde{x}^\mu = x^\mu + \epsilon\, \xi^\mu(x) + \ldots$
↳ infinitesimal

$\boxed{\mathcal{L}_\xi g = 2\sigma g}$

tendrá asociado $\Omega(x) = 1 + \epsilon\, \sigma(x) + \ldots$

$*$ ⇒ $\boxed{\partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu = 2\sigma(x)\, \eta_{\mu\nu}}$

traceando $2\, \partial\cdot\xi = 2 d\, \sigma(x) \to \boxed{\sigma(x) = \frac{1}{d}\, \partial\cdot\xi}$

⇒ $\boxed{\partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu = \frac{2}{d}\, \partial\cdot\xi\, \eta_{\mu\nu}}$

Manipulando la ec $\xrightarrow{\partial_\rho(\;)}$ $\left(\eta_{\mu\nu}\Box + (d-2)\partial_\mu\partial_\nu\right)\partial\cdot\xi = 0$ $\quad d\neq 2 \Downarrow$ $\boxed{\partial_\mu\partial_\nu(\partial\cdot\xi) = 0}$

$\partial_\nu(\;)$ traza $(d-1)\,\Box(\partial\cdot\xi) = 0$

$\partial_\mu\partial_\nu(\partial\cdot\xi) = 0 \Rightarrow \partial\cdot\xi = \text{lineal en } x^\mu$
$\Rightarrow \xi^\mu$ cuadrático en x^μ (si $d\neq 2$)

La sln general resulta

$$\boxed{\xi_\mu(x) = \underbrace{a_\mu}_{\substack{\text{traslaciones}\\ P_\mu}} - \underbrace{\omega_{\mu\nu} x^\nu}_{\substack{\text{rotaciones/Boost}\\ M_{\mu\nu}}} + \underbrace{\kappa\, x_\mu}_{\substack{\text{Dilataciones}\\ D}} + \underbrace{b_\mu x^2 - 2x_\mu (b\cdot x)}_{\substack{\text{transf. Conformes especiales (SCT)}\\ K^\mu}}}$$

$\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}$ $\qquad \{P_\mu, M_{\mu\nu}, D, K_\mu\}$

El # total de parámetros:

$$\underset{P_\mu}{d} + \underset{M_{\mu\nu}}{\frac{d(d-1)}{2}} + \underset{D}{1} + \underset{K_\mu}{d} = \underbrace{\frac{1}{2}(d+2)(d+1)}_{\#\text{ generadores de "}SO(d+2)\text{"}}$$

Euclid $SO(d+1,1)$

Lorentz $SO(d,2)$

$a_\mu, \omega_{\mu\nu} \rightsquigarrow$ Killing Vectors de $\eta_{\mu\nu}$ $\Rightarrow \Omega = 1$

$\kappa, b_\mu \rightsquigarrow \Omega \neq 1$

Dado que conocemos los vectores, podemos integrarlos y obtener las curvas integrales. Así visualizamos su acción

$$\xi^\mu(x) = \frac{dx^\mu}{dt} \longrightarrow x^\mu(t) = \text{curva integral}$$
flujo

$x^\mu(0) = x^\mu$

$\frac{dx^\mu}{d\lambda} = \xi^\mu(x)$

$\boxed{\tilde{x}^\mu_{\text{trasl}} = x^\mu(t) = x^\mu + t a^\mu}$ → $\Omega = 1$

$\boxed{\tilde{x}^\mu_{\text{Rot}} = x^\mu(t) = \Lambda^\mu{}_\nu(t)\, x^\nu}$ con $\Lambda^\mu{}_\nu = (e^{t\omega})^\mu{}_\nu$ & $\omega^\mu{}_\nu = \eta^{\mu\rho}\omega_{\rho\nu}$

$\boxed{\tilde{x}_{\text{dil}} = x^\mu(t) = \underset{\lambda}{e^{t}}\, x^\mu}$ ⇒ $\Omega_{\text{dil}}(x) = \lambda$

$\boxed{\tilde{x}_{\text{SCT}} = x^\mu(t) = \frac{x^\mu + t b^\mu x^2}{1 + 2t(b\cdot x) + t^2 b^2 x^2}}$

$\boxed{\tilde{x}^\mu = \frac{\frac{x^\mu}{x^2} - t b^\mu}{\left(\frac{x^\mu}{x^2} - t b^\mu\right)^2}}$

↳ $\Omega_{\text{SCT}}(x) = \frac{1}{1 + 2t(b\cdot x) + t^2 b^2 x^2}$

Nota:

. $\boxed{\text{SCT} = \text{Inversión} \circ \text{traslación} \circ \text{Inversión}}$

. $\boxed{\tilde{x}^\mu = \frac{x^\mu}{x^2}}$ es una transformación Conforme "discreta"

$(\text{Inversión})^2 = \mathbb{1}$

- Vas a encontrar en algunos textos que el grupo Conforme se define como aquel definido por

$$\boxed{\text{Grupo Conforme} = \text{Poincaré} + \text{Dilatación} + \underset{\text{SCT}}{\underset{\cup}{\text{Inversión}}}}$$

- Estrictamente la SCT no están bien definidas pues mapean $x^\mu = -\frac{b^\mu}{b^2}$ (cero del denominador) $\longrightarrow \tilde{x}^\mu = \infty$

La manera correcta es decir que el grupo conforme actúa "bien" en $\boxed{\underbrace{\mathbb{R}^d \cup \infty}_{\text{plano compactificado}} = S^d}$ Ver Luscher Mack para el caso Lorentziano

- En $d=2$ el grupo conforme tiene ∞ generadores

Álgebra Conforme $\to$ de Witt (clásico), Virasoro (quantum)

Álgebra Conforme:

$$\boxed{\begin{aligned} P_\mu &= -i\partial_\mu \\ M_{\mu\nu} &= i(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu) \\ D &= -i x^\mu \partial_\mu \\ K_\mu &= -i\left(x^2\partial_\mu - 2x_\mu(x^\nu\partial_\nu)\right) \end{aligned}} \rightsquigarrow \boxed{\begin{aligned} [D,P_\mu] &= iP_\mu \\ [D,K_\mu] &= -iK_\mu \\ [K_\mu,P_\nu] &= -2i(\eta_{\mu\nu}D - M_{\mu\nu}) \\ [K_\rho,M_{\mu\nu}] &= i(\eta_{\rho\mu}K_\nu - \eta_{\rho\nu}K_\mu) \\ &\text{idem } P_\mu \\ [M,M] &= \eta M \ldots \end{aligned}}$$

$\mathbb{R}^{d-1,1}$ u $\mathbb{R}^{d}$

en euclid $\delta_{\mu\nu}$

(*) (en signatura Lorentziana) es el álgebra $SO(d,2)$ definiendo $\rightsquigarrow SO(d,2)$

$a,b = (-1,\underbrace{0,1,\ldots d-1}_{\text{Minkowski } \mu},d)$ $\quad \eta_{ab} = \mathrm{diag}(\underbrace{--}_{2}\underbrace{++\ldots+}_{d})$

$$\left.\begin{aligned} S_{\mu\nu} &= M_{\mu\nu} \\ S_{-d} &= D \\ S_{-\mu} &= \tfrac{1}{2}(K_\mu + P_\mu) \\ S_{d\mu} &= \tfrac{1}{2}(P_\mu - K_\mu) \end{aligned}\right\} \quad S_{ab} = \begin{array}{c|ccc} & - & 0\ldots d-1 & d \\ \hline - & 0 & \frac{1}{2}(P_\mu+K_\mu) & D \\ 0 \ldots d-1 & -\frac{1}{2}(P_\mu+K_\mu) & M_{\mu\nu} & \frac{1}{2}(K_\mu-P_\mu) \\ d & -D & \frac{1}{2}(P_\mu-K_\mu) & 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow \boxed{[S_{ab}, S_{cd}] = i(S_{ac}\eta_{bd} - S_{bc}\eta_{ad} + \ldots)}$$

Lorentz $\leftrightarrow SO(d,2)$

Análogamente Euclídeo $\leftrightarrow SO(d+1,1)$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{c}\text{Isometrías} \\ AdS_{d+1} \\ (y_-^2 + y_0^2 - y_{d+1}^2 = L^2)\end{array} = \text{Grupo Conforme}\left(\mathbb{R}^d\right)_{\mathbb{R}^{d-1,1}}}$$

Nota:

de $\frac{\partial\tilde{x}}{\partial x}\frac{\partial\tilde{x}}{\partial x}\eta = \Omega^2\eta \Rightarrow \frac{\partial\tilde{x}^\mu}{\partial x^\nu} = \Omega(x)\Lambda^\mu{}_\nu(x)$

$$\Rightarrow \boxed{\left|\frac{\partial\tilde{x}}{\partial x}\right| = \Omega^d_{(x)}}$$

con $\Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta \eta_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta}$

$\hookrightarrow$ toda trafo conforme define una rotación y una transf de escala localmente

Tensores del grupo Conforme: a.k.a Campos primarios

¿Qué son? los ladrillitos que tienen propiedades de transformación lindas frente al grupo conforme.

$\boxed{\text{Campo primario } \phi \text{ escalar}} \Leftrightarrow$ frente a transf Conforme $x \to \tilde{x}(x)$ $\Rightarrow \boxed{\tilde{\phi}(\tilde{x}) = \Omega^{-\Delta_\phi}_{(x)}\phi(x)}$

en QFT in Poincaré $\Omega = 1$ y no aparece este término

$\tilde{x} = \lambda x$ dilat

ej: $\boxed{\tilde{\phi}(\lambda x) = \frac{1}{\lambda^{\Delta_\phi}}\phi(x)}$

En el caso de primarios con spin $\rightsquigarrow \phi_J$

$\uparrow$ va a tener índices en alguna rep de Lorentz

Primario Φ_J $\Leftrightarrow$ frente a $\tilde{x}(x)$ Conforme $\boxed{\tilde{\Phi}_I(\tilde{x}) = \Omega^{-\Delta_\Phi}_{(x)}\, \rho_I^J(\Lambda)\, \Phi_J(x)}$

Representación del elemento Λ en imp

Recordemos $\tilde{x}(x) \Rightarrow \frac{\partial\tilde{x}^\mu}{\partial x^\nu} = \Omega(x)\Lambda^\mu_\nu$ $\hookrightarrow \Lambda^\mu{}_\nu = e^{\omega^\mu{}_\nu} \Rightarrow \rho(\Lambda) = e^{(M_{\mu\nu})_I^J\omega^{\mu\nu}}$

Moral: en una CFT los campos se clasifican con $\phi_I(x)$

dimensión de escala $\boxed{\Delta_\phi}$

$\boxed{\text{spin} = \# \text{ índices}}$

$\mathcal{O}_{\Delta,S}(x) \leftrightarrow \boxed{(\Delta_\phi, S_\phi)} \longleftrightarrow (m^2, S)$ análogo a en Poincaré

Nota: la derivada de un campo primario (en gral) no es un campo primario $\rightsquigarrow \tilde{\partial}_\mu\tilde{\phi} = \frac{\partial x^\rho}{\partial\tilde{x}}\partial_\rho(\Omega\,\phi) \neq \Omega\Lambda_\mu{}^\nu\partial_\nu\phi$

- A los operadores construidos a partir de derivadas de op 1ros $\partial_\mu\phi$ se los llama descendientes.
- Análisis dimensional: $[\phi]=\Delta_\phi \to \boxed{[\partial\phi]=\Delta_\phi+1}$
- Podemos estudiar bajo qué condiciones la derivada de un primario es un primario $\leftrightarrow$ relacionado con corriente conservada

Funciones de correlación en CFT:

Supongamos una CFT con campos escalares primarios

$$\langle \phi_1(x_1)\dots\phi_n(x_n)\rangle = G(x_1,\dots,x_n)$$

Las funciones de correlación van a tener propiedades de transformación frente a transf conformes.

Consideremos una función de correlación en una CFT
ϕ_i primarios

$$\langle\phi_1(x_1)\dots\phi_n(x_n)\rangle = \int D\phi\, \phi_1(x_1)\dots\phi_n(x_n)\, e^{-S[\phi]}$$

si asumimos que la acción y la medida son invariantes frente a las T.C. (*)

tenemos

$$\langle\phi_1(\tilde x_1)\dots\phi_n(\tilde x_n)\rangle = \int D\phi\,\phi_1(\tilde x_1)\dots\phi_n(\tilde x_n)\, e^{-S[\phi]} \quad \phi\to\tilde\phi \text{ cambio variable muda}$$

$$= \int D\tilde\phi\, \tilde\phi_1(\tilde x_1)\dots\tilde\phi_n(\tilde x_n)\, e^{-S[\tilde\phi]}$$

medida invariante   acción invariante

$$= \int D\phi\, \frac{1}{\Omega^{\Delta_1}(x_1)}\phi_1(x_1)\dots\frac{1}{\Omega^{\Delta_n}}\phi(x_n)\, e^{-S[\phi]}$$

$$= \frac{1}{\Omega^{\Delta_1}(x_1)}\dots\frac{1}{\Omega^{\Delta_n}(x_n)}\langle\phi_1(x_1)\dots\phi_n(x_n)\rangle$$

Frente a $x\to\tilde x$

$$\boxed{\langle\phi_1(\tilde x_1)\dots\phi_n(\tilde x_n)\rangle = \frac{1}{\Omega^{\Delta_1}(x_1)}\dots\frac{1}{\Omega^{\Delta_n}(x_n)}\langle\phi_1(x_1)\dots\phi_n(x_n)\rangle}$$

Veamos cómo esta propiedad determina unívocamente las funciones de 2- y 3-pt de operadores primarios:

2pts Consideremos

$$\langle\phi_{\Delta_1}(x_1)\phi_{\Delta_2}(x_2)\rangle = G(x_1,x_2)$$

en virtud de (*) tenemos para una dilatación $x'=\lambda x$

$$G(\lambda x_1,\lambda x_2)=\frac{1}{\lambda^{\Delta_1}}\frac{1}{\lambda^{\Delta_2}}G(x_1,x_2)$$

Poincaré inv = traslación + Rotación $\Rightarrow G(x_1,x_2)=f(|x_1-x_2|)$

Llamando $|x_1-x_2|=|x|$ tenemos

$$\lambda^{\Delta_1+\Delta_2} f(\lambda|x|) = f(|x|)$$

$\Rightarrow$ f es una función homogénea de peso $-(\Delta_1+\Delta_2)$

$$\Rightarrow \boxed{f(|x|)=\frac{C_{12}}{|x|^{\Delta_1+\Delta_2}}}$$

Usemos ahora covarianza frente a SCT

$$\tilde x = \frac{x+bx^2}{1+2b\cdot x+b^2x^2} \to \Omega(x)=\frac{1}{1+2b\cdot x+b^2x^2}$$

(*) toma ahora la forma:

$$\boxed{\frac{C_{12}}{|x_1-x_2|^{\Delta_1+\Delta_2}} = \Omega^{\Delta_1}(x_1)\,\Omega^{\Delta_2}(x_2)\,\frac{C_{12}}{|\tilde x_1-\tilde x_2|^{\Delta_1+\Delta_2}}}$$

en virtud de $\boxed{|\tilde x_1-\tilde x_2|^2=\Omega(x_1)\Omega(x_2)|x_1-x_2|^2}$
$\forall\, \tilde x(x)$ T.Conf (Mostrar) (*)

$$\frac{1}{\cancel{|x_1-x_2|}} = \frac{\Omega^{\Delta_1}(x_1)\,\Omega^{\Delta_2}(x_2)}{(\Omega(x_1)\Omega(x_2))^{\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2}}\,\cancel{|x_1-x_2|}}$$

$$\Rightarrow \frac{\Omega^{\Delta_1/2}(x_1)}{\Omega(x_1)^{\Delta_2/2}} = \frac{\Omega^{\Delta_1/2}(x_2)}{\Omega^{\Delta_2/2}(x_2)} \Rightarrow \boxed{\Delta_1=\Delta_2}$$

$$h(x_1) = h(x_2) = cte$$

$$\Rightarrow \boxed{\langle\phi_{\Delta_1}(x_1)\,\phi_{\Delta_2}(x_2)\rangle = \begin{cases}\dfrac{C_{12}}{|x_1-x_2|^{2\Delta}}, & \Delta_1=\Delta_2=\Delta\\ 0, & \Delta_1\neq\Delta_2\end{cases}}$$

Nota: C_{12} lo puedo reescalear en ϕ haciendo $\tilde\phi=\frac{1}{\sqrt{C_{12}}}\phi$

Procediendo de la misma manera con la función de 3pt usando Poinc + Dilat + SCT

indeterminado a.k.a OPE coeffs.

$$\Rightarrow \boxed{\langle\phi_{\Delta_1}(x_1)\,\phi_{\Delta_2}(x_2)\,\phi_{\Delta_3}(x_3)\rangle = \frac{C_{123}}{x_{12}^{\Delta_1+\Delta_2-\Delta_3}\,x_{23}^{\Delta_2+\Delta_3-\Delta_1}\,x_{13}^{\Delta_1+\Delta_3-\Delta_2}}}$$

acá está la dinámica

Las funciones de 4 pt y superiores ya no están unívocamente determinadas pues $\exists$ combinaciones invariantes frente a T.C

a.k.a Cross Ratios

$$\boxed{u = \frac{x_{12}\, x_{34}}{x_{13}\, x_{24}} \qquad v = \frac{x_{12}\, x_{34}}{x_{14}\, x_{23}}}$$

que son invariantes frente a (A)

$$\Rightarrow \langle \phi_1(x_1)\ldots\phi_4(x_4)\rangle = \left(\prod_{i<j} x_{ij}^{\frac{\Delta}{3}-\Delta_i-\Delta_j}\right) \underbrace{F(u,v)}_{\text{indeterminada}}$$

donde $\Delta = \sum_{i=1}^{4} \Delta_i$

¿Cuál es la dimensión de escala de un campo libre en d dimensiones?

$$S = \int d^dx \; \partial_\mu\phi\, \partial_\mu\phi$$

queremos que sea invariante frente a

$$\tilde{x} = \lambda x$$
$$\tilde{\phi}(\tilde{x}) = \lambda^{-\Delta}\phi(x)$$

$$S = \int d^d\tilde{x}\; \tilde{\partial}_\mu\tilde{\phi}\; \tilde{\partial}_\mu\tilde{\phi} = \int \lambda^d d^dx \frac{1}{\lambda}\partial_\mu\left(\frac{1}{\lambda^\Delta}\phi\right)\frac{1}{\lambda}\partial_\mu\left(\frac{1}{\lambda^\Delta}\phi\right)$$

$$\tilde{\partial}_\mu = \frac{\partial}{\partial\tilde{x}^\mu} = \frac{\partial x^\rho}{\partial\tilde{x}^\mu}\frac{\partial}{\partial x^\rho} = \frac{1}{\lambda}\partial_\mu$$

$$= \int d^dx \; \underbrace{\frac{\lambda^{d-2}}{\lambda^{2\Delta}}}_{=1} \partial_\mu\phi\, \partial_\mu\phi$$

$$\Rightarrow 2\Delta = d-2 \rightarrow \boxed{\Delta_\phi^{free} = \frac{d-2}{2}}$$

dimensión de escala de un campo escalar libre

Analizando condiciones de unitariedad de ireps de $SO(d,2)$ resulta que $\forall$ primario $\boxed{\Delta \geq \Delta_{free} = \frac{d-2}{2}}$

a.k.a. cota de unitariedad

- Invarianza de escala $\Rightarrow \exists$ SCT? No

¿$\exists$ teorías que son inv de escala pero no CFT, pero en gral al construir lagrangianos inv de escala resultan conformes. Ch II

Polchinski '80, Rychkov lectures

¿Qué términos de interacción son invariantes de escala?

$$S = \int d^dx \left[(\partial\phi)^2 + g_n\phi^n\right]$$

si queremos que sea invariante frente a $x\to\lambda x$ tenemos

$$x\to\lambda x \Rightarrow \phi \to \frac{1}{\lambda^{\Delta_\phi}}\phi \quad \text{con } \Delta_\phi = \frac{d-2}{2}$$

$$\int d^dx\, g_n\phi^n \longrightarrow \int \lambda^d d^dx\; g_n \frac{1}{\lambda^{n\Delta_\phi}}\phi^n \qquad \lambda^d\frac{1}{\lambda^{n\Delta_\phi}} = 1$$

$$\lambda^{n\left(\frac{d-2}{2}\right)} = \lambda^d \rightsquigarrow n = \frac{2d}{d-2}$$

n	d	
0	2	
6	3	$\rightsquigarrow g\phi^6$ en $d=3$
4	4	$\rightsquigarrow g\phi^4$ en $d=4$
$10/3$	5	$\rightsquigarrow \cancel{g\phi^{10/3}}$ en $d=5$
3	6	$\rightsquigarrow g\phi^3$ en $d=6$

A nivel clásico más allá de $d=6$ no sabemos cómo escribir una teoría conforme interactuante!!

se suele decir $\nexists$ lagrangian CFT beyond $d=6$

2d Euclídeo $\quad ds^2 = dx^2 + dy^2 = dz\,d\bar{z} \qquad z = x+iy$

toda transf holo $\omega = \omega(z) \rightsquigarrow d\omega = \omega' dz$

$$d\omega\, d\bar{\omega} = \underbrace{\omega'(z)\,\bar{\omega}'(\bar{z})}_{\Omega(z,\bar{z})} dz\,d\bar{z}$$

$$\omega = z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy \rightsquigarrow \omega' = 2z$$

$$\left.\begin{aligned}\tilde{x}(x,y) &= x^2-y^2\\ \tilde{y} &= 2ixy\end{aligned}\right\}\; d\tilde{x}^2 + d\tilde{y}^2 = 4(x^2+y^2)(dx^2+dy^2)$$

$$\{P_1, P_2, H\} \to SO(2,1) \longrightarrow \underbrace{J^\pm, H}_{} \rightsquigarrow H = D$$

$K|0\rangle = 0$ 1ro $\qquad [D,P] = P \qquad J^+ = P \qquad |0\rangle \rightsquigarrow D|0\rangle = E_0|0\rangle$

$P|0\rangle = $ desc $\qquad [D,K] = -K \qquad J^- = K \qquad D(J^+|0\rangle) = (E_0+1)\,P|0\rangle$