

## Resumo

Neste trabalho foi realizada uma investigação sobre a existência de bifurcações na distribuição dos modos quasinormais de perturbações escalares de buracos negros esfericamente simétricos com constante cosmológica não-nulas. Algumas soluções de buracos negros de modelos de gravidade alternativa foram explorados.

## Introdução

Os modos quasinormais de perturbações lineares de um espaço-tempo de buraco negro são determinados pelas suas propriedades intrínsecas, massa  $M$ , carga elétrica  $Q$  e momento angular  $J$ . Através desses modos pode-se analisar a condição de estabilidade do buraco negro. Além da perturbação gravitacional é possível entender a estabilidade da geometria fundo analisando a evolução de campos teste nesses espaços-tempos.

Em um trabalho recente [1], Fortuna e Vega mostraram a existência de bifurcações no espectro quasinormal de um campo eletromagnético se propagando na vizinhança de um buraco negro de Schwarzschild Anti-de Sitter. Essa bifurcação no espectro indica a existência de um regime amortecimento supercrítico com a presença de modos puramente imaginários.

Inspirado neste trabalho vamos analisar o formalismo nele apresentado para outro campo teste, a saber, o campo escalar se propagando na vizinhança de buracos negros com constante cosmológica.

## Equação de Klein-Gordon

A equação que governa a evolução de um campo escalar teste em um espaço-tempo fixo é a equação de Klein-Gordon dada por

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu\psi = 0. \quad (1)$$

O elemento de linha que descreve a geometria esfericamente simétrica no qual o campo teste é inserido é

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{1}{f(r)}dr^2 + r^2d\Omega^2. \quad (2)$$

Portanto, se aplicarmos em  $\psi(t, r, \theta, \phi)$  a seguinte separação de variáveis

$$\psi(t, r, \theta, \phi) = e^{-i\omega t} \frac{R(r)}{r} Y(\theta, \phi) \quad (3)$$

e substituí-lá, juntamente com a Eq.(2), na Eq.(1) obtêm-se a equação de movimento para o campo escalar dada por

$$(\omega^2 - V(r))R(r) + f(r)f'(r)R'(r) + f(r)^2R''(r) = 0. \quad (4)$$

Cujo potencial efetivo por ser escrito como

$$V(r) = f(r) \left( \frac{f'(r)}{r} + \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right). \quad (5)$$

onde  $\ell$  é o índice de multipolo dos harmônicos esféricos.

## Método numérico

Para o levantamento do comportamento dos modos quasinormais do campo foi aplicado um método numérico espectral nas Eqs.(4,5).

O código que usamos é uma adaptação daquele que foi implementado em um pacote do Mathematica desenvolvido por [1] que chamaremos de **SpectralBP** e está disponibilizado em [2]. Este método usa o polinômio de Bernstein.

$$B_k^N(u) = \frac{N!}{k!(N-k)!} u^k (1-u)^{N-k}, \quad (6)$$

Para expandir a autofunção  $\phi(u)$  como uma soma linear de funções de base ponderadas.

$$\phi(u) = \sum_{k=0}^N c_k B_k^N(u) \quad (7)$$

O intervalo a ser considerado para  $u$  é  $[0, 1]$ .

## Buraco negro de Schwarzschild

Iniciaremos a análise de bifurcações dos modos quasinormais analisando o buraco negro de Schwarzschild cuja a métrica é representada pela Eq.(2) com a seguinte função

$$f(r) = \frac{r - r_h}{r}. \quad (8)$$

cujo horizonte de evento é  $r_h = 2M$ . Será necessário usar um sistema de coordenadas adimensionais dado por,  $r \rightarrow rr_h$  e  $\omega \rightarrow \frac{\omega}{r_h}$ , mapeando  $r$  no intervalo  $[1, \infty]$ . Nessas condições as soluções assintóticas da equação de movimento serão  $(r-1)^{-i\omega}$  quando  $r \rightarrow 1$  e  $e^{ir\omega} r^{i\omega}$  quando  $r \rightarrow \infty$ . Então podemos construir uma solução geral como

$$R(r) = r^{2i\omega} (r-1)^{-i\omega} \exp(ir\omega) \phi(r) \quad (9)$$

Fazemos a transformação  $r \rightarrow \frac{1}{u}$ , depois aplicamos **SpectralBP**.

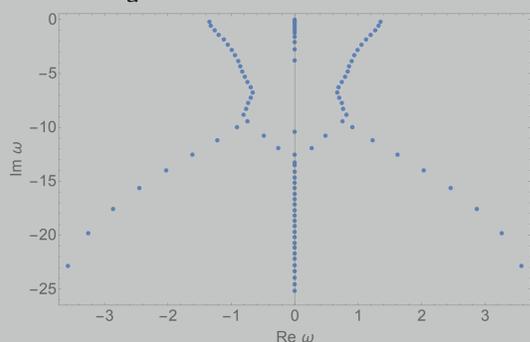


Figure 1: Bifurcação para o caso de S, para  $\ell = 3$ .

## Buraco negro de Schwarzschild-Anti de Sitter

Agora vamos aplicar o mesmo procedimento a um buraco negro com constante cosmológica. Para o caso de constante cosmológica negativa teremos

$$f(r) = 1 - \frac{\rho^2 + 1}{\rho^2 r} + \frac{r^2}{\rho^2} \quad (10)$$

Fizemos  $f(r)$  adimensional, onde  $r = 1$  corresponde ao horizonte de evento do buraco negro e  $\rho = a/r_h$  onde  $a$  é o raio AdS.

Neste caso as soluções assintóticas são dadas por

$$\begin{array}{|l|l|} \hline r \rightarrow 1 & r \rightarrow \infty \\ \hline (r-1)^{-\frac{i\rho^2\omega}{\rho^2+3}} & r + \frac{1}{r^2} \\ \hline \end{array}$$

Fazemos a transformação  $r \rightarrow \frac{1}{u}$ , depois aplicamos o código **SpectralBP**.

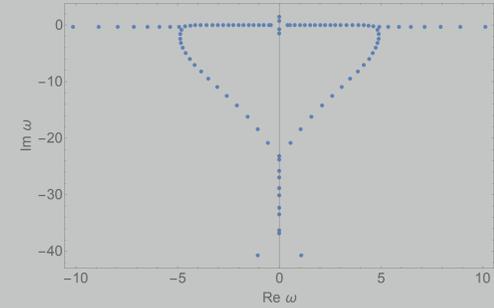


Figure 2: S-AdS,  $R(r) = r^{1+\frac{i\rho^2\omega}{\rho^2+3}}(r-1)^{-\frac{i\rho^2\omega}{\rho^2+3}}\phi(r)$ , com  $\ell = 10$ ,  $\rho = 10$ .

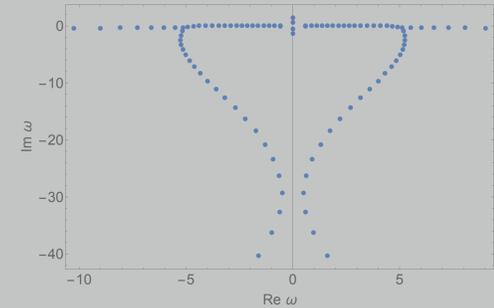


Figure 3: S-AdS,  $R(r) = r^{1+\frac{i\rho^2\omega}{\rho^2+3}}(r-1)^{-\frac{i\rho^2\omega}{\rho^2+3}}\phi(r)$ , com  $\ell = 12$ ,  $\rho = 10$ .

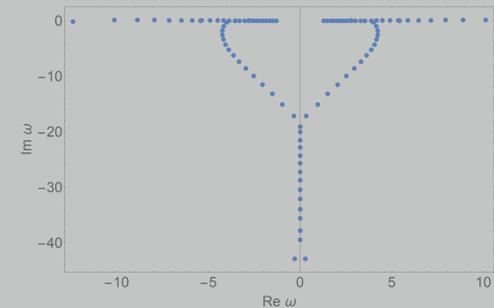


Figure 4: S-AdS,  $R(r) = r^{-2+\frac{i\rho^2\omega}{\rho^2+3}}(r-1)^{-\frac{i\rho^2\omega}{\rho^2+3}}\phi(r)$ , com  $\ell = 10$ ,  $\rho = 10$ .

## Observações e conclusões

- ▶ A forma do gráfico depende do  $R(r)$  escolhido (que deve satisfazer a solução da equação diferencial nos limites), bem como da escolha de  $\ell$  e possivelmente de outros parâmetros.
- ▶ Note que queremos trabalhar com  $u \in [0, 1]$ , sendo assim, deve-se tomar cuidado com o caso S-dS pois  $r \in [r_h, r_c]$ .
- ▶ As bifurcações podem ser interpretadas como desdobramento de estados do campo escalar (análogo à estrutura hiperfina).
- ▶ Foi observado o fenômeno de bifurcação dos modos quasinormais para o campo escalar evoluindo na vizinhança de um buraco negro Sch-AdS.
- ▶ A análise das soluções de teorias alternativas de gravitação está em andamento.

## Agradecimento

Os autores agradecem à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) e ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Itajubá pelo apoio financeiro a este trabalho.

## Referências

- [1] Sean Fortuna and Ian Vega. Electromagnetic quasinormal modes of Schwarzschild-anti-de Sitter black holes: bifurcations, spectral similarity, and exact solutions in the large black hole limit. 2022.
- [2] Sean Julian C. Fortuna. Spectralbp, <https://github.com/slashdotfield/spectralbp>, março 2020.